

# Reakcje fuzji i ich zastosowanie do produkcji nieznananych nuklidów

1. Historyczny przegląd metod wytwarzania w laboratorium nieznananych ciężkich nuklidów „od Mendelejewa do 2014”.
2. Reakcje jądrowe. Kinematyka reakcji dwuciałowych. Układ laboratoryjny, układ środka masy. Geometryczna interpretacja przekroju czynnego. Różniczkowy przekrój czynny.
3. Rozpraszanie cząstek przez sferycznie symetryczny potencjał. Pojęcie toru cząstki. Funkcja odchylenia.
4. Opis kwantowy rozpraszania. Metoda fal parcjalnych. Przekroje czynne reakcji i rozpraszania.
5. Reakcje fuzji wywołane przez ciężkie jony. Jądro złożone. Model Bohra. Kanały rozpadu jądra złożonego. Formuła Hausera-Feshbacha. Gęstość poziomów jądrowych. Model statystyczny.
6. Rozszczepienie jąder atomowych. Bariery na rozszczepienie i ich zależność od efektów powłokowych.

7. Ograniczenia reakcji kompletnej fuzji. Reakcje niekompletnej fuzji. Reakcje głęboko-nieelastyczne. Reakcje szybkiego rozszczepienia. Wychwył a fuzja.
8. Jądra superciężkie. Reakcje zimnej i gorącej fuzji. Metody produkcji i identyfikacji.
9. Perspektywy odkryć nowych jeszcze cięższych jąder superciężkich.

# Odkrywanie nowych pierwiastków 1869 - 2014

Dmitrii Iwanowicz Mendelejew (1834 – 1907)

1869

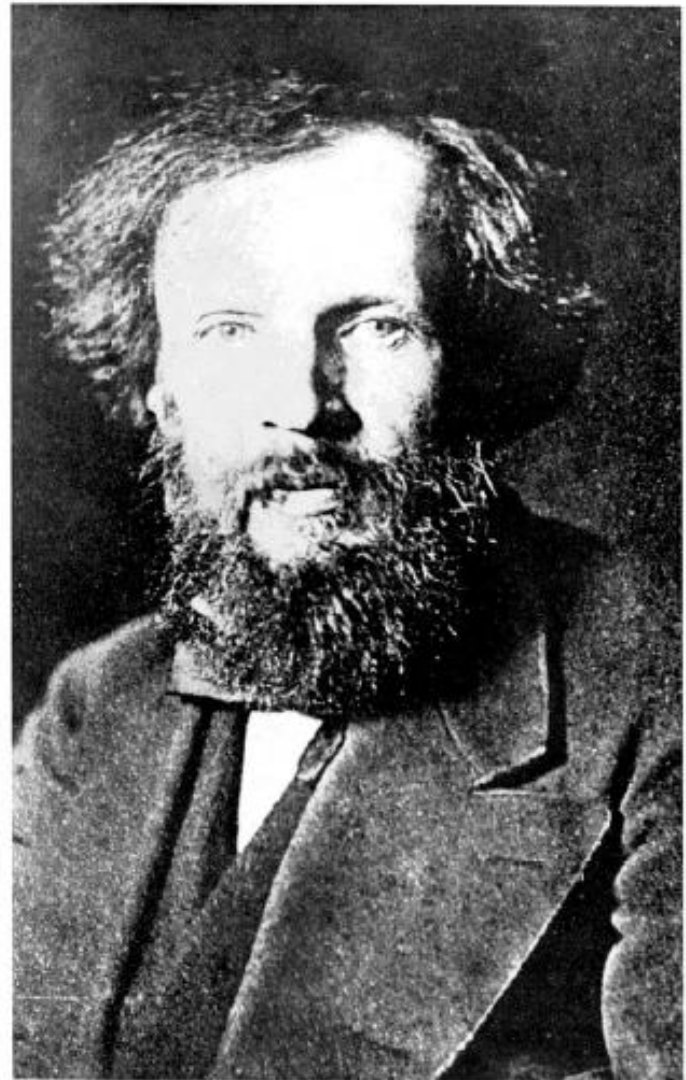
*Handwritten notes in Russian and French:*

*Список элементов...*

H=1	Li=7	Na=23	K=39	Rb=85	Cs=133
Be=9	B=10	C=12	N=14	O=16	F=19
Mg=24	Al=27	Si=28	P=31	S=32	Cl=35.5
Ca=40	Sc=45	Ti=48	V=51	Cr=52	Mn=55
Fe=56	Ni=59	Cu=63.5	Zn=65	As=75	Se=78
Br=80	Sr=87	Zr=90	Nb=94	Mo=96	Tc=100
Y=89	Rb=85	Sr=87	Zr=90	Nb=94	Mo=96
Ca=40	Sc=45	Ti=48	V=51	Cr=52	Mn=55
Fe=56	Ni=59	Cu=63.5	Zn=65	As=75	Se=78
Br=80	Sr=87	Zr=90	Nb=94	Mo=96	Tc=100
Y=89	Rb=85	Sr=87	Zr=90	Nb=94	Mo=96

*Essai d'une systématique des éléments d'après leurs poids atomiques et fonctions chimiques de M. Mendeleew.*

*18 17/69.*



63 pierwiastki

# ОПЫТЪ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВЪ.

ОСНОВАННОЙ НА ИХЪ АТОМНОМЪ ВѢСѢ И ХИМИЧЕСКОМЪ СХОДСТВѢ.

			Ti = 50	Zr = 90	? = 180.
			V = 51	Nb = 94	Ta = 182.
			Cr = 52	Mo = 96	W = 186.
			Mn = 55	Rh = 104,4	Pt = 197,4.
			Fe = 56	Rn = 104,4	Ir = 198.
			Ni = Co = 59	Pt = 106,6	Os = 199.
H = 1			Cu = 63,4	Ag = 108	Hg = 200.
	Be = 9,4	Mg = 24	Zn = 65,2	Cd = 112	
	B = 11	Al = 27,4	? = 68	Ur = 116	Am = 197?
	C = 12	Si = 28	? = 70	Sn = 118	
	N = 14	P = 31	As = 75	Sb = 122	Bi = 210?
	O = 16	S = 32	Se = 79,4	Te = 128?	
	F = 19	Cl = 35,6	Br = 80	I = 127	
Li = 7	Na = 23	K = 39	Rb = 85,4	Cs = 133	Tl = 204.
		Ca = 40	Sr = 87,6	Ba = 137	Pb = 207.
		? = 45	Ce = 92		
		?Er = 56	La = 94		
		?Yt = 60	Di = 95		
		?In = 75,6	Th = 118?		

Д. Менделѣевъ



## Julius Lothar Meyer (1830-1895)

Julius Lothar Meyer (1830-1895) and Dmitri Ivanovich Mendeleev (1834-1907) worked at the [University of Heidelberg](#) only five years apart—both under the direction of [Robert Bunsen](#)

### Periodensystem nach Lothar Meyer (1870)

II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
<u>B</u> =11,0	<u>Al</u> =27,3		–		? <u>In</u> =113,4	<u>Tl</u> =202,7	
		–		–		–	
<u>C</u> =11,97	<u>Si</u> =28		–		<u>Sn</u> =117,8		<u>Pb</u> =206,4
		<u>Ti</u> =48		<u>Zr</u> =89,7		–	
<u>N</u> =14,01	<u>P</u> =30,9		<u>As</u> =74,9		<u>Sb</u> =122,1		<u>Bi</u> =207,5
		<u>V</u> =51,2		<u>Nb</u> =93,7		<u>Ta</u> =182,2	
<u>O</u> =15,96	<u>S</u> =31,98		<u>Se</u> =78		<u>Te</u> =128?		–
		<u>Cr</u> =52,4		<u>Mo</u> =95,6		<u>W</u> =183,5	
–	<u>F</u> =19,1	<u>Cl</u> =35,8		<u>Br</u> =79,75		<u>J</u> =126,5	–
		<u>Mn</u> =54,8		<u>Ru</u> =103,5		<u>Os</u> =198,6?	
		<u>Fe</u> =55,9		<u>Rh</u> =104,1		<u>Ir</u> =196,7	
		<u>Co</u> = <u>Ni</u> =58,6		<u>Pd</u> =106,2		<u>Pt</u> =196,7	
<u>Li</u> =7,01	<u>Na</u> =22,99	<u>K</u> =39,04		<u>Rb</u> =85,2		<u>Cs</u> =132,7	–
		<u>Cu</u> =63,3		<u>Ag</u> =107,66		<u>Au</u> =196,2	
? <u>Be</u> =9,3	<u>Mg</u> =23,9	<u>Ca</u> =39,9		<u>Sr</u> =87,0		<u>Ba</u> =136,8	–
		<u>Zn</u> =64,9		<u>Cd</u> =111,6		<u>Hg</u> =199,8	

Quelle: Annalen der Chemie, Supplementband 7, 354 (1870)  
 Periodensystem für den Schulgebrauch - chemie-master.de

# FILOZOFIA

## CHIMICZNA,

cz. II.

FUNDAMENTALNE PRAWDY TERAZNIEY-  
SZEY CHIMII.

PRZEZ A. FOURCROY.

z Francuskiego przełożona przez X. Jana  
Bystrzyckiego S. P. Towarzystwa Król.  
Warsz. Przyjaciół nauk Ojczyzna. Profesora  
Fizyki w Szkołach Warszawskich.

W WARSZAWIE 1808.

w Drukarni Piarskiej.

Z tej edycji zrobione jest tłumaczenie  
Polskie. Wynalazki późniey odkryte przy-  
toczone są na swoim miejscu przez tłum-  
macza, jako też i noty objaśniające nie-  
które prawdy. Nadto położony na końcu  
działa Słownik Chemiczny, ułatwi zroz-  
umienie Autorów tak dawnych, jak tera-  
źniejszych, osobliwie dla tych, którzy  
nauczywszy się Chemii według dawney  
nomenklatury, nie mieli dosyć czasu i spo-  
sobności uczenia się iły z teraźniejszoy.

f.) Uran odkrył Klaproth w roku  
1789. Jest w drobnych kulkach szkiełnych,  
popielaty, prawie niestopliwy, trudno da-  
licy się niedokwasć: jego niedokwas jest  
albo żółty albo zielonawy. Jeszcze niemięjsz  
z niego nżytku. Znajduje się przy rudach  
czerwianych

1896 - 1939

6 nowych pierwiastków odkrytych w naturalnych szeregach promieniotwórczych

${}_{84}\text{Po}$ ,  ${}_{88}\text{Ra}$  - 1898

${}_{89}\text{Ac}$  - 1899

${}_{86}\text{Rn}$  - 1900

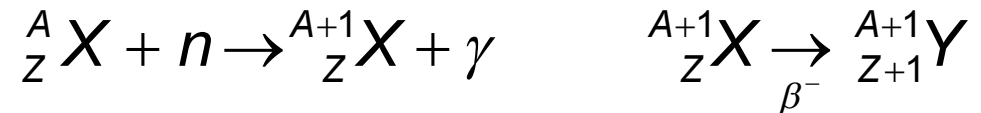
${}_{91}\text{Pa}$  - 1913

${}_{87}\text{Fr}$  - 1939

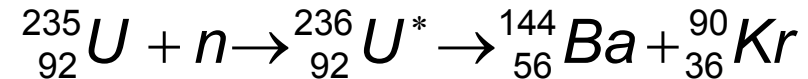
1934

E. Fermi proponuje syntezę transuranowców poprzez proces dwustopniowy

E. Fermi, E. Amaldi, O. D'Agostino, F. Rasetti, and E. Segrè (1934) "Radioattività provocata da bombardamento di neutroni III," *La Ricerca Scientifica*, vol. 5, no. 1, 452-453.



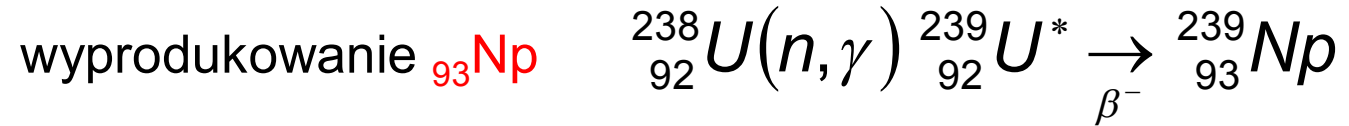
1938 Próby wytworzenia tą metodą  ${}_{93}\text{Np}$  doprowadziły do odkrycia rozszczepienia (O. Hahn i F. Strassmann)



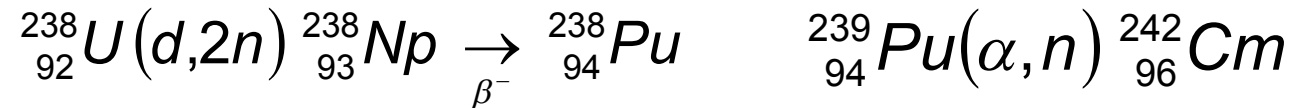
L. Meitner and O. R. Frisch, *Nature* 143, 239 (1939).



1940



pierwsze próby uzyskania pierwiastków transuranowych w reakcjach z cząstkami naładowanymi (Berkeley)

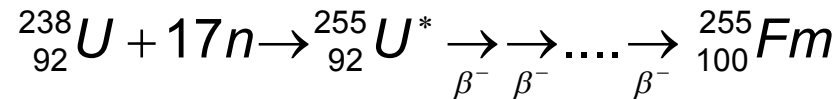
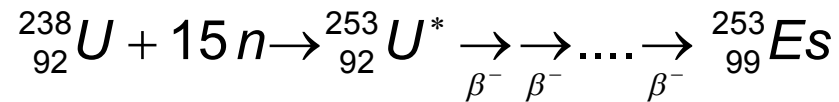


1940 - 1955

7 nowych pierwiastków o  $Z = 93 - 98$  oraz  $Z = 101$  (reakcje  $(n, \gamma)$  i reakcje z lekkimi cząstkami)

1955

Informacja o odkryciu pierwiastków o  $Z = 99, 100$  w odpadach radioaktywnych z wybuchu termojądrowego



$Z=101$  stanowi nieprzekraczalną granicę możliwości syntezy poprzez procesy  $(n, \gamma)$  i reakcje z lekkimi cząstkami naładowanymi.



## Z > 101

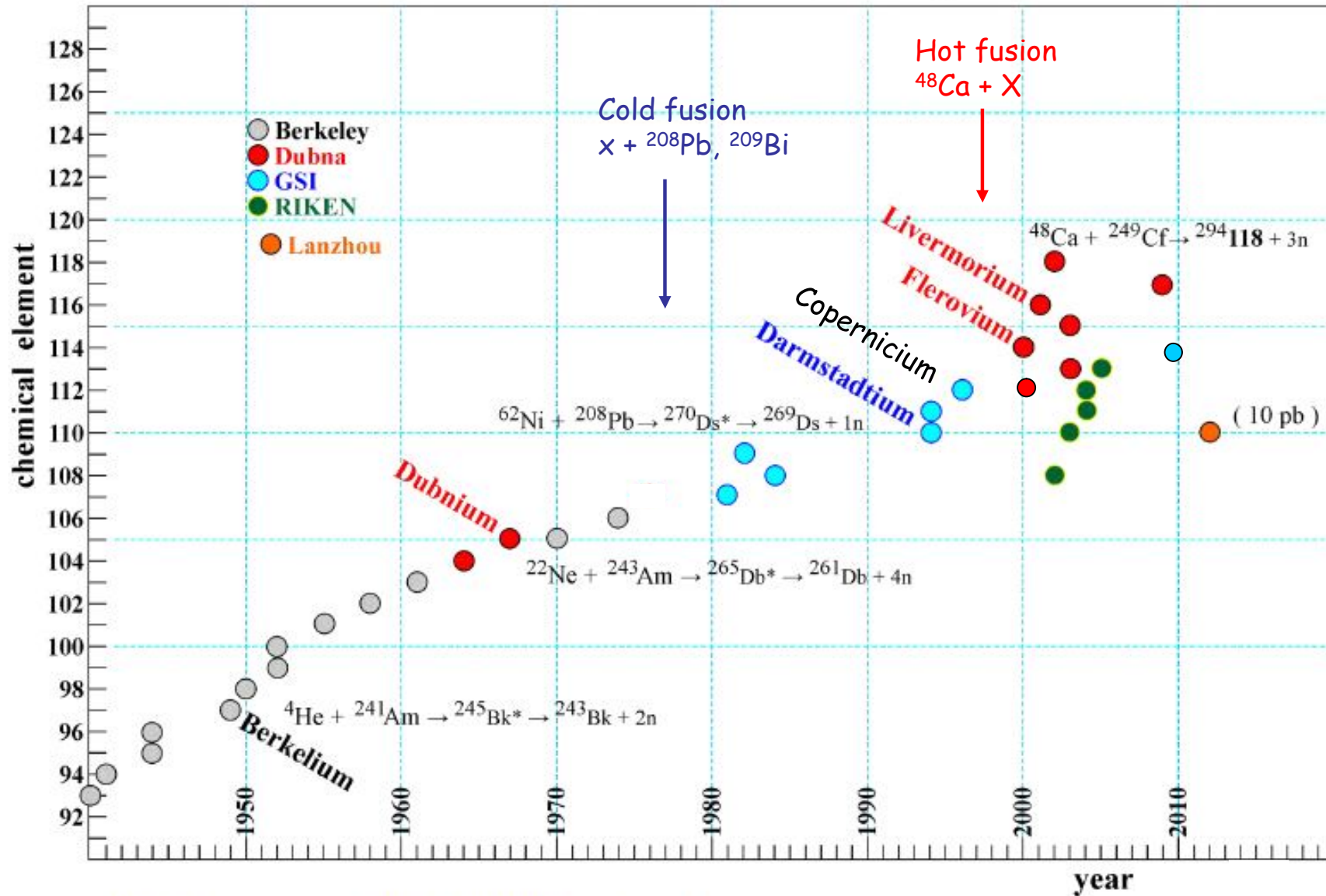
Jedyną drogą wytworzenia pierwiastków o  $Z > 101$  są reakcje syntezy dwóch jąder atomowych



CR (Compound Residue) , ER (Evaporation Residue) pozostałość jądra złożonego

- 1957 uruchomienie akceleratora przyspieszającego ciężkie jony HILAC (Heavy Ion Linear Accelerator) w Berkeley (USA)
- 1962 uruchomienie cyklotronu U-200 w Dubnej (Rosja)
- 1958 -1974 odkryto pierwiastki o  $Z = 102 - 106$
- 1981-1996 wytworzono w GSI (UNILAC - UNiversal Linear Accelerator + SHIP – Separator for Heavy Ion reaction Products, Niemcy) pierwiastki o  $Z = 107 - 112$
- 2005 odkrycie  $Z = 113$  (Riken, Japonia), (Dubna) ?
- 1999 -2010 odkrycie pierwiastków o  $Z = 114 - 118$  (Dubna) (2006-2014 potwierdzenie istnienia pierwiastków o  $Z = 114 - 117$  (GSI))

# Hand-made elements (history)



2012: a new player in the field: IMP, Lanzhou, China

V. Zagrebaev

# 2014

1		2014																18	
1																		2	
H																	He		
3	4													5	6	7	8	9	10
Li	Be													B	C	N	O	F	Ne
11	12	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
Na	Mg	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr		
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr		
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54		
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe		
55	56	57	58-71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn		
87	88	89	90-103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	
Fr	Ra	Ac	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	113	114	115	116	117	118		


Lanthanoide

Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71


Actinoide

Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103

 natural, stable

 natural, unstable

 artificial, unstable

 Wytworzone w reakcjach z lekkimi cząstkami

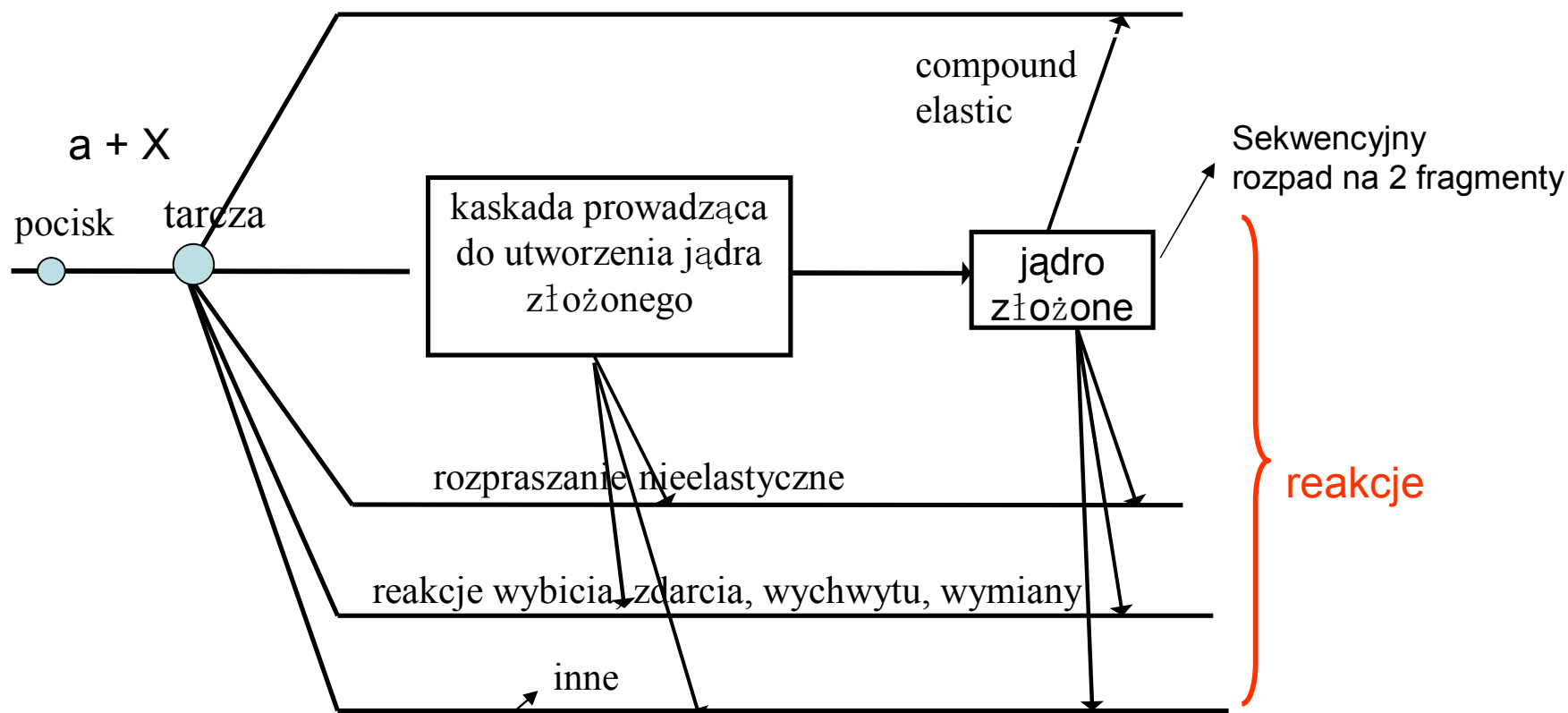
 Wytworzone w reakcjach z HI



# Zderzenie jądro-jądro

XX wiek, lata 70

Rozpraszanie elastyczne  $X + a$



XXI wiek lepsze poznanie mechanizmu reakcji, poznanie innych typów reakcji

## Reakcje jądrowe

kanał wejściowy  $\alpha$

kanał wyjściowy  $\beta$



a pocisk

X jądro tarczy

Y jądro końcowe

b, c, d... produkty końcowe

}

Jądro końcowe Y oraz produkty kanału wyjściowego b, c, d ....mogą być wzbudzone, następnie wyzbywają się energii wzbudzenia na kolejnym etapie procesu.

jądro tarczy:  $^1\text{H}$ , d, ..... $^{252}\text{Cf}$

pociski:  $\gamma$ , e, n, p, d, ... $\alpha$ , HI, RIB

HI - zjonizowane stabilne nuklidy o  $Z > 2$  .....do  $^{238}\text{U}$

RIB – zjonizowane radioaktywne nuklidy

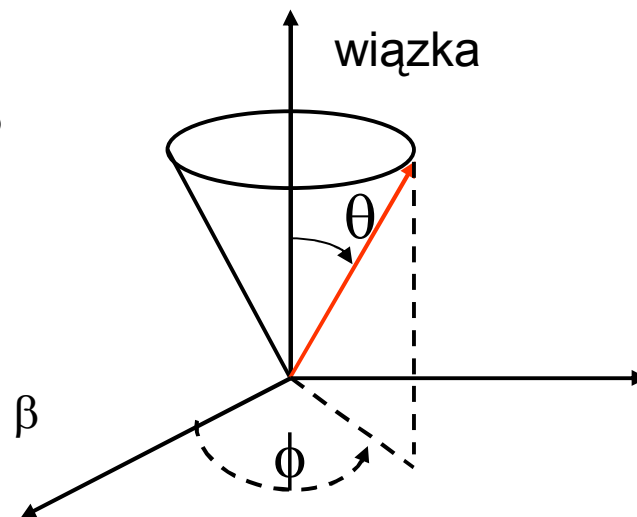
Ograniczymy się do **reakcji**, w których pociskami są **HI** o energii **< 10 MeV/nukleon**.

Dla takich energii możemy stosować opis nierelatywistyczny.

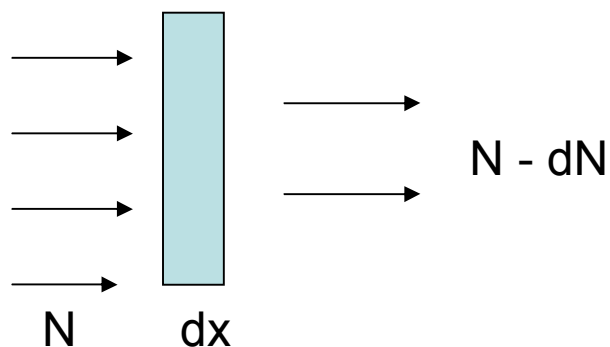
Poza nieelastycznym rozpraszaniem znaczny przekrój czynny dla **reakcja syntezy** **lub** procesów z **dwoma lub trzema fragmentami**

Co mierzymy?

1. Identyfikujemy produkty końcowe:  $A, Z, E, \theta, \Phi$
2. Widma energetyczne, rozkłady kątowe
3. Sposoby rozpadu produktów reakcji pierwotnej
4. Krotność cząstek
5. Korelacje między produktami reakcji
6. Różniczkowy przekrój czynny dla procesu  $\alpha \rightarrow \beta$
7. Całkowity przekrój czynny dla procesu  $\alpha \rightarrow \beta$



## Geometryczna interpretacja całkowitego przekroju czynnego - $\sigma_{tot}$



$$dN = n dx N \sigma$$

Wymiar  $\sigma$  ( $\text{cm}^2$ )

$N$  – liczba cząstek padających na jednostkę powierzchni w jednostce czasu

$dx$  – grubość tarczy,  $n$  – liczba jąder tarczy w  $\text{cm}^3$

$dN$  – liczba cząstek, które zostały usunięte z wiązki na jednostkę powierzchni i jednostkę czasu

$\sigma$  - prawdopodobieństwo usunięcia cząstki padającej z wiązki

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_r$$

$\sigma_r$  – suma przekrojów czynnych dla wszystkich możliwych końcowych kanałów reakcji

Założenie: pocisk zostaje usunięty z wiązki jeśli trafi na jądro tarczy.

$\sigma_r$  równa się powierzchni przekroju jądra.  $\sigma_r = S = \pi R^2$        $R = r_0 A^{1/3}$   
 $r_0 = 1.12 \text{ fm}$

np.       $A=120$

$R = 5.5 \text{ fm} = 5.5 \times 10^{-13} \text{ cm}$        $S = 96 \times 10^{-26} \text{ cm}^2 \approx 10^{-24} \text{ cm}^2$

Jednostka przekroju czynnego **barn**       $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$

$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}$       całkowity przekrój czynny na określony proces  $\alpha \rightarrow \beta$   
w szczególności procesy z tworzeniem stanu przejściowego  
(niestabilne jądro złożone CN)

Formalna teoria rozpraszania potencjałowego i reakcji



## Różniczkowy przekrój czynny

$$\frac{d\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}}{d\Omega_{\beta}} = \frac{\text{liczba cząstek usuniętych w procesie } \alpha \rightarrow \beta \text{ w jednostkowy kąt bryłowy kanału wyjściowego na jednostkę czasu}}{\text{liczba cząstek padających na jednostkę powierzchni w jednostce czasu}}$$

Jednostki b/steradian

Całkowity przekrój czynny  $\sigma = \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

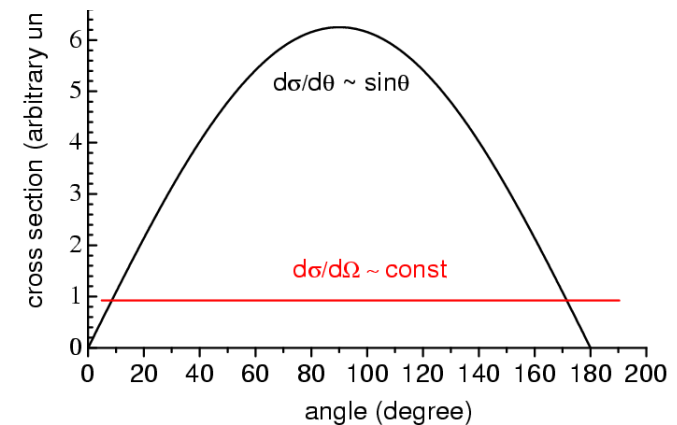
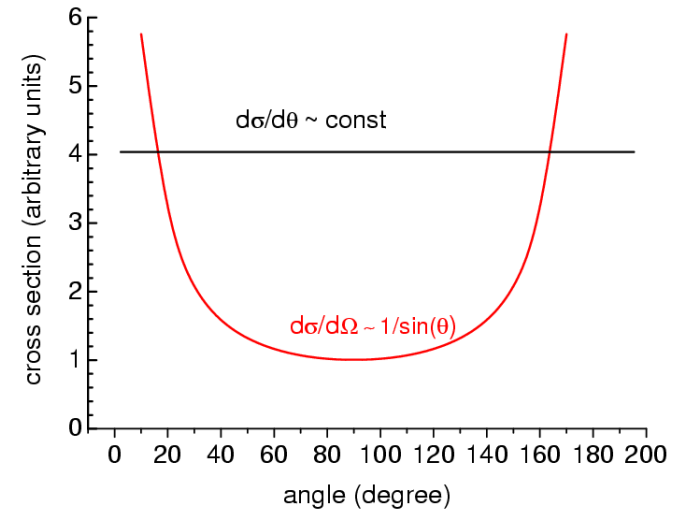
$$dS = r d\theta r \sin\theta d\phi$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

Jeśli  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  niezależne od  $\phi$

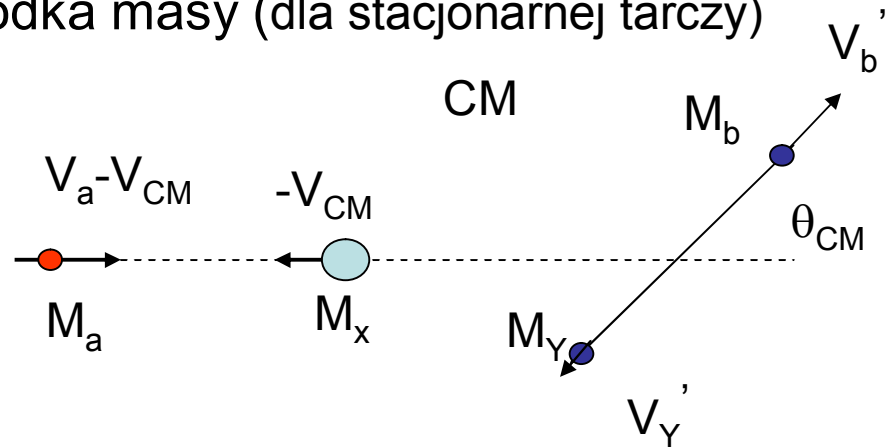
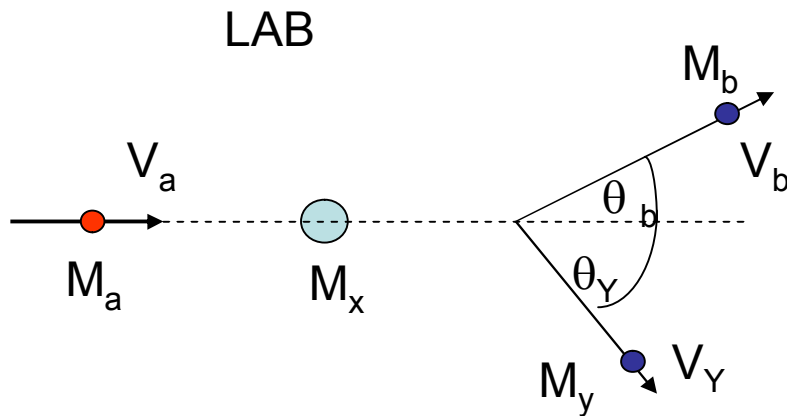
$$\sigma = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta$$

$$\frac{d\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}}{d\theta_{\beta}} = 2\pi \sin\theta_{\beta} \frac{d\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}}{d\Omega_{\alpha \rightarrow \beta}}$$



# Reakcje dwuciałowe X(a,b)Y

Układ laboratoryjny a układ środka masy (dla stacjonarnej tarczy)



prędkość środka masy

$$M_x V_{CM} = M_a (V_a - V_{CM})$$

$$V_{CM} = \frac{M_a V_a}{M_a + M_x}$$

$$V_a' = V_a - V_{CM} = V_a M_x / (M_a + M_x)$$

$$V_x' = -V_{CM}$$

$$T_{CM} = \frac{M_a V_a'^2}{2} + \frac{M_x V_x'^2}{2} = \frac{M_a V_a^2}{2} \left( \frac{M_x}{M_a + M_x} \right)^2 + \frac{M_a V_a^2}{2} \left( \frac{M_x M_a}{(M_a + M_x)^2} \right)$$

$$T_{CM} = T_a \left( \frac{M_x^2 + M_x M_a}{(M_a + M_x)^2} \right) = T_a \frac{M_x}{M_a + M_x}$$

$$T_{CM} = T_{lab} \frac{M_x}{M_a + M_x}$$

$$T_{CM} = \frac{M_a V_a^2 M_x}{2(M_a + M_x)} = \frac{\mu V_a^2}{2} = \frac{\mu V_{rel}^2}{2}$$

$V_{rel}$  – prędkość względna

Całkowita energia kanału wejściowego  $E_i = (M_a + M_X)c^2 + T_a + T_X$   
 $T_i$  - energia kinetyczna

Całkowita energia kanału wyjściowego  $E_f = (M_b + M_Y)c^2 + T_b + T_Y + E_b^* + E_Y^*$   
 $E_i^*$  - energia wzbudzenia

Prawo zachowania energii  $E_i = E_f$

$$(M_a + M_X)c^2 + T_a + T_Y = (M_b + M_Y)c^2 + T_b + T_Y + E_b^* + E_Y^*$$

Definiujemy:

$$Q = (M_a + M_X)c^2 - (M_b + M_Y)c^2 - (E_b^* + E_Y^*) = T_b + T_Y - (T_a + T_X) \quad - \text{ ciepło reakcji (MeV)}$$

$Q > 0$  - reakcja egzotermiczna

$Q < 0$  - reakcja endotermiczna

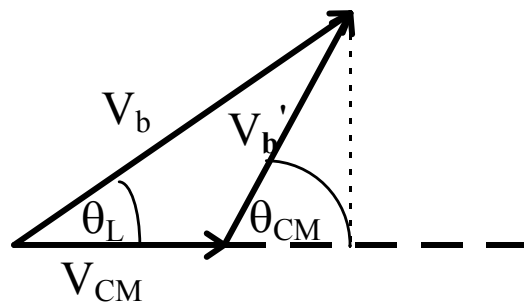
Jeśli b, Y są w stanie podstawowym  $E_b^* = E_Y^* = 0$   $Q_{gg} = (M_a + M_X)c^2 - (M_b + M_Y)c^2$

**Energia progowa** dla reakcji endotermicznej ( $Q < 0$ )

Warunek zajścia reakcji  $T_{CM} \geq |Q_{gg}|$   $T_{lab} (M_X / (M_a + M_X)) \geq |Q_{gg}|$

$$T_{lab} \geq |Q_{gg}| (1 + M_a / M_X)$$

Związek między kątem wylotu produktu końcowego w układzie laboratoryjnym  $\theta_L$  a kątem wylotu w układzie środka masy  $\theta_{CM}$



$$\vec{V}_b = \vec{V}_{CM} + \vec{V}'_b$$

$$V_b \sin \theta_L = V'_b \sin \theta_{CM}$$

$$V_b \cos \theta_L = V_{CM} + V'_b \cos \theta_{CM}$$

$$\tan \theta_L = \frac{V'_b \sin \theta_{CM}}{V_{CM} + V'_b \cos \theta_{CM}} = \frac{\sin \theta_{CM}}{\frac{V_{CM}}{V'_b} + \cos \theta_{CM}}$$

$$\gamma = \frac{V_{CM}}{V'_b}$$

1.  $\gamma \ll 1$        $\theta_{CM} \Rightarrow \theta_L$

2.  $\gamma = 1$        $\theta_{CM} = 2\theta_L$

3.  $\gamma \gg 1$       niezależnie od wartości kąta  $\theta_{CM}$        $\theta_L \Rightarrow 0$

# Klasyczny opis rozpraszania

W układzie środka masy problem rozpraszania dwóch jąder o masach  $M_1$  i  $M_2$ , których oddziaływanie może być opisane **potencjałem centralnym**  $V(r)$  ( $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ) można zredukować do problemu rozpraszania cząstki o masie  $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  w centralnym potencjale  $V(r)$ .  
Dla potencjału centralnego rozpraszanie jest w płaszczyźnie.

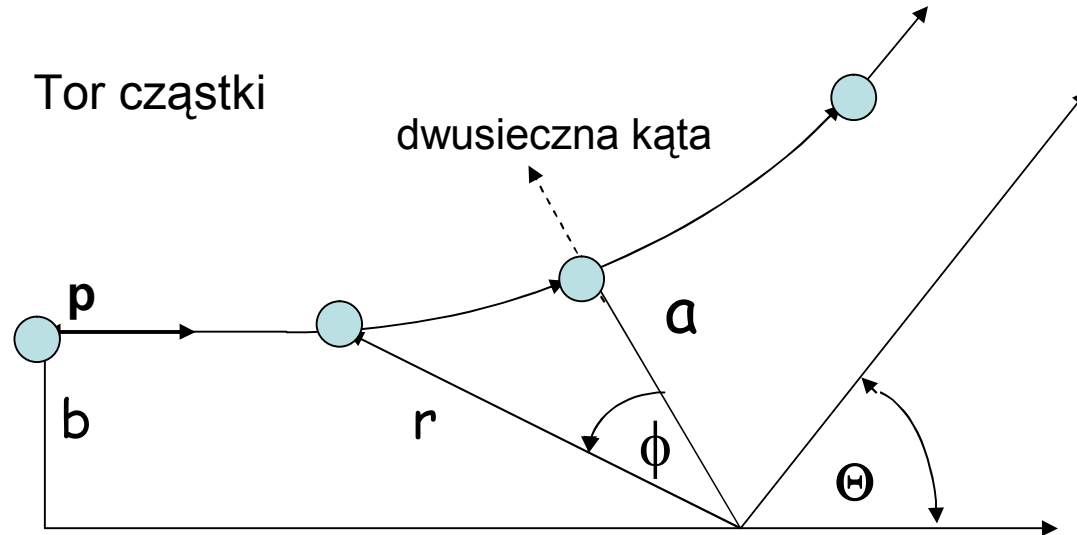
$\mathbf{b}$  - parametr zderzenia

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{b}$$

$\mathbf{a} - r_{\min}$  odległość największego zbliżenia

$\Theta(b)$  - kąt odchylenia

$$\Theta(b) = \pi - 2\phi(\infty)$$



We współrzędnych sferycznych tor cząstki określony jest przez 2 stałe ruchu

$$E = \frac{\mu}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad L = \mu r^2 \frac{d\phi}{dt} \quad \text{moment pędu prostopadły do płaszczyzny rozpraszania}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[ E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \quad \vec{L} = \vec{p} \times \vec{b} \quad |L| = b \cdot \sqrt{2\mu E}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu \left[ E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}} = \frac{b\sqrt{2\mu E}}{r^2 \sqrt{2\mu \left[ E - V(r) - \frac{b^2 2\mu E}{2\mu r^2} \right]}} = \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

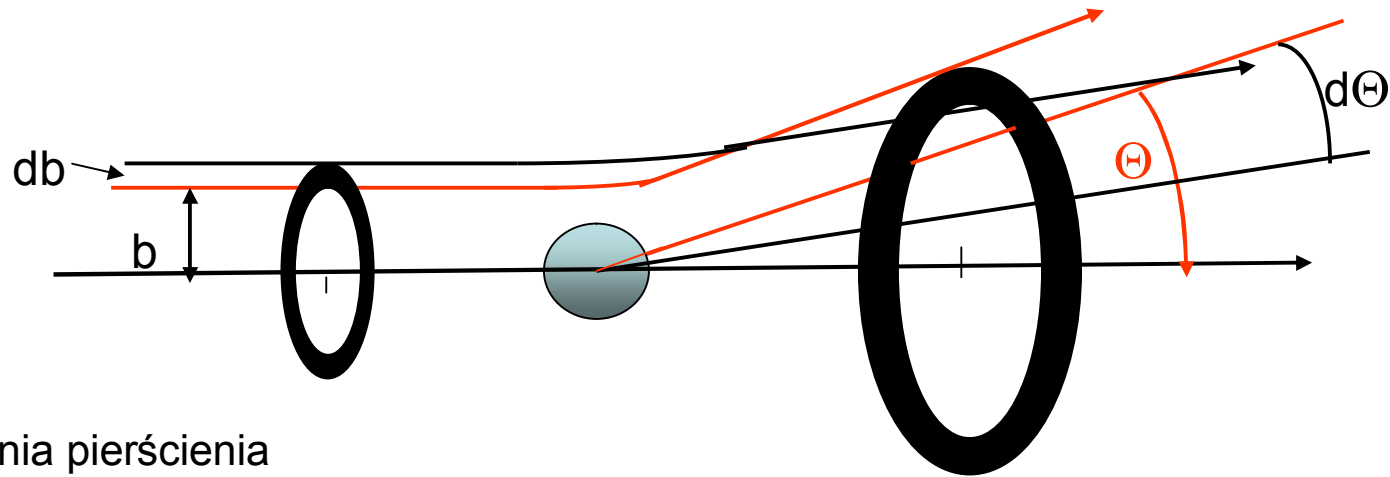
$$\int_{r_{\min}}^{\infty} d\phi = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

$$\phi(\infty) = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

$$\Theta(b) = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

zależność kąta odchylenia od parametru zderzenia – **funkcja odchylenia**

Znając **funkcję odchylenia** (deflection function) możemy wyznaczyć  **$d\sigma/d\Omega$**



Powierzchnia pierścienia

$$\pi (b+db)^2 - \pi b^2 \approx 2\pi bdb$$

$N$  – strumień cząstek padających

$$N 2\pi bdb = N (d\sigma/d\Omega)d\Omega$$

$d\Omega = 2\pi |\sin\Theta d\Theta|$  - wyciąkowane po  $d\phi$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi bdb}{2\pi |\sin\Theta d\Theta|} = \frac{b}{|\sin\Theta|} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|$$

**Różniczkowy przekrój czynny na rozproszenie jest jednoznacznie określony przez funkcję odchylenia**

## Funkcja odchylenia dla potencjału kulombowskiego (ładunki punktowe)

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

$$\Theta(b) = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

wprowadzamy oznaczenie

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} = z$$

$$\Theta(b) = \pi + 2 \arcsin \left( \frac{z + \frac{b^2}{r}}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right) \Bigg|_{r_{\min}}^{\infty}$$

dla  $r_{\min}$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=r_{\min}} = 0$$

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{\min}}$$

$$L = pb = b \cdot \sqrt{2\mu E}$$

$$E - \frac{b^2 2\mu E}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{\min}} = 0 \quad \longrightarrow \quad r_{\min} = z \pm \sqrt{z^2 + b^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \left[ 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2Eb}{Z_1 Z_2 e^2} \right)^2} \right]$$

$$\Theta(b) = 2 \arctan \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2Eb} \right)$$

$$0 \leq \Theta(b) \leq \pi \quad \theta = \Theta(b)$$



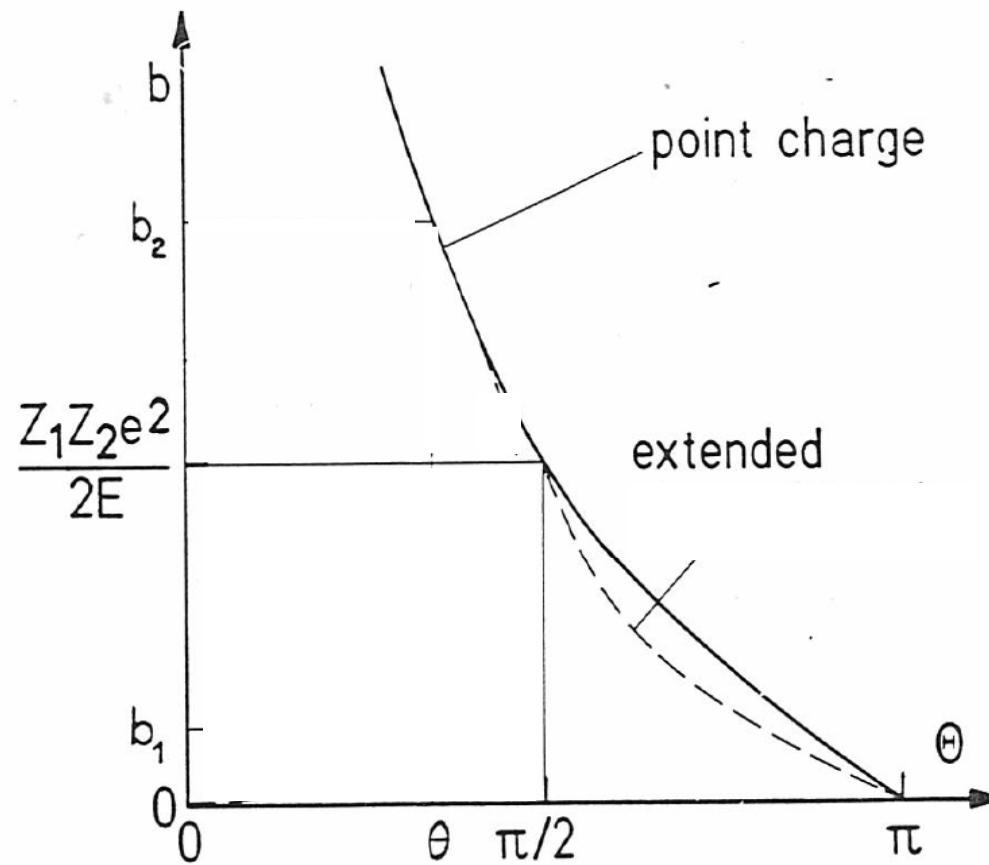


Fig.2.1.2 Deflection functions  $\Theta(b)$  for the scattering of a charged particle from a point charge and an extended charge with total charge equal to the point charge

Znając funkcję odchylenia możemy wyznaczyć różniczkowy przekrój czynny

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|$$

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \cot\left(\frac{\Theta}{2}\right) \quad \frac{db}{d\Theta} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \left( -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{2E \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin(\Theta)} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

$$\sin(\Theta) = 2 \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie Rutherforda

# Funkcja odchylenia dla ogólnej postaci potencjału

$$V_L(r) = V_C(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V_N(r)$$

kulombowski  
potencjał odpychający

potencjał centryfugalny

potencjał jądrowy  
przyciągający

Potencjał jądrowy

$$V_N(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/a]}$$

potencjał Saxona-Woodsa

$V_0, R_0, a$  – parametry

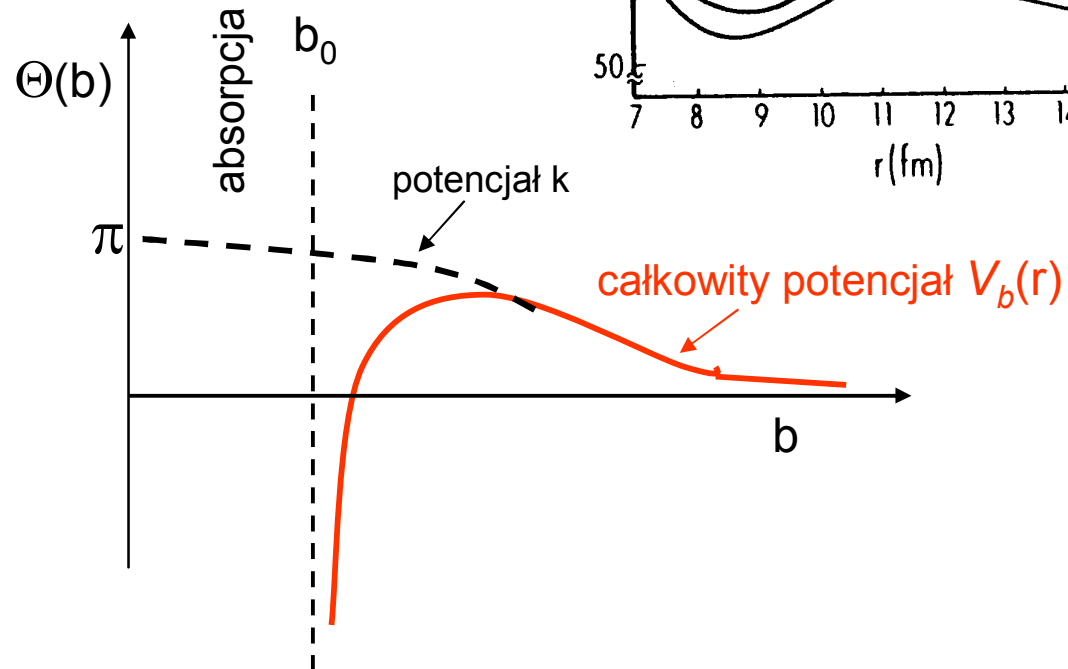
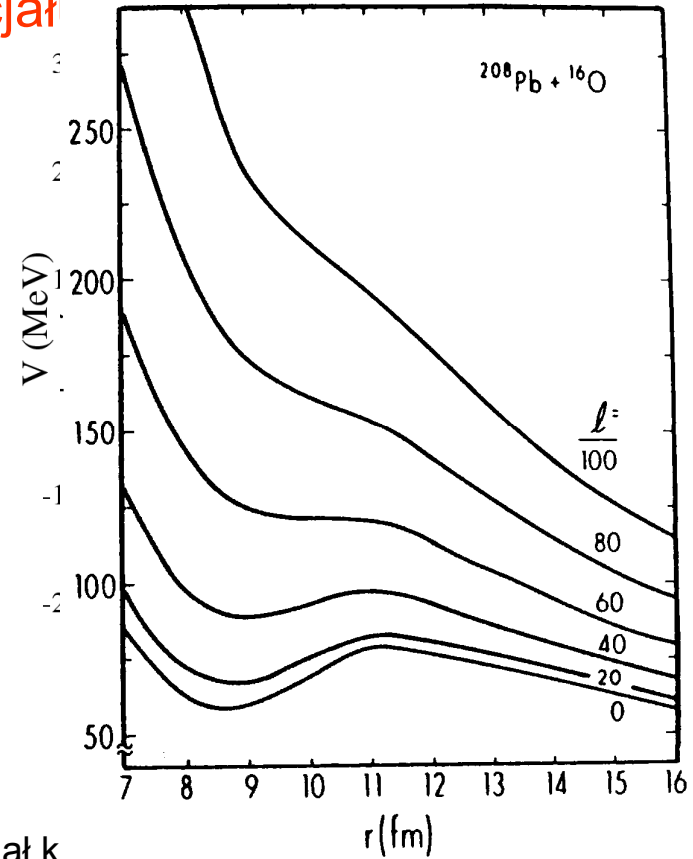
$V_0 \sim 50 - 100$  MeV

$R_0 = r_0 A^{1/3}$  fm ( $r_0 = 1.2$  fm)

$a \sim 0.8$  fm

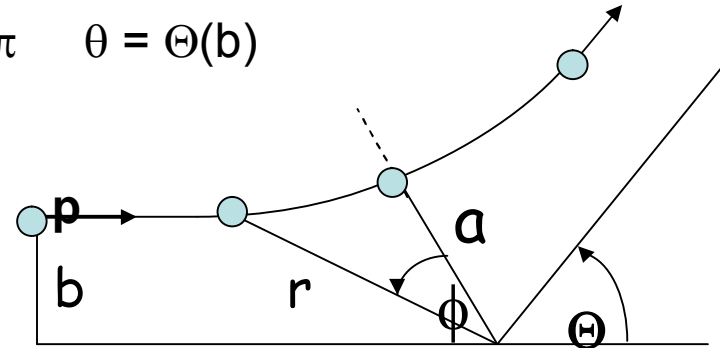
przy  $b_0$  – orbitowanie

$$\left. \frac{dV_b(r)}{dr} \right|_{r=r_{\min}} = 0$$

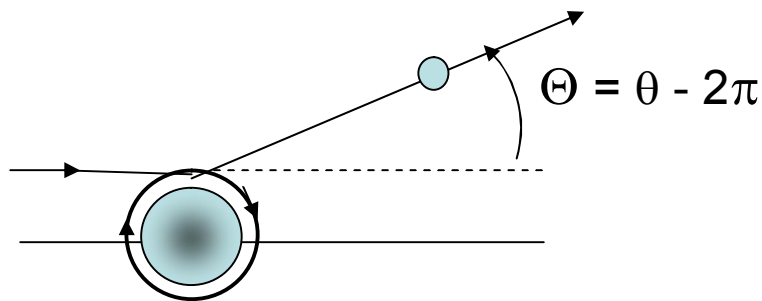
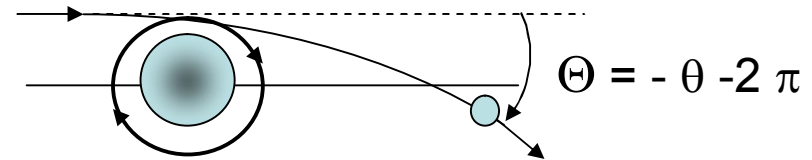
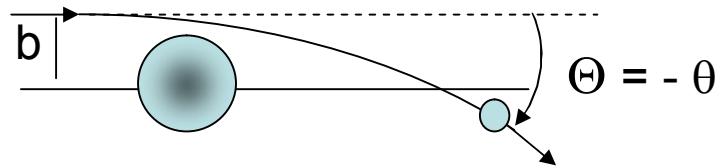


# Związek między kątem odchylenia $\Theta$ a kątem rozproszenia $\theta$

Dla potencjału **odpychającego**:  $0 \leq \Theta(b) \leq \pi$      $\theta = \Theta(b)$



Dla potencjału **przyciągającego**     $\Theta(b) \leq 0$



$$\Theta = q\theta - m2\pi$$

$$q = \pm 1 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dla

$$E_{CM} \leq \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_c} = E_B$$

$$R_c = R_{1C} + R_{2C} \quad R_{iC} = r_{0C} A_i^{1/3} \quad r_{0C} = 1.44 \text{ fm}$$

Dla

$$E_{CM} > \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_c}$$

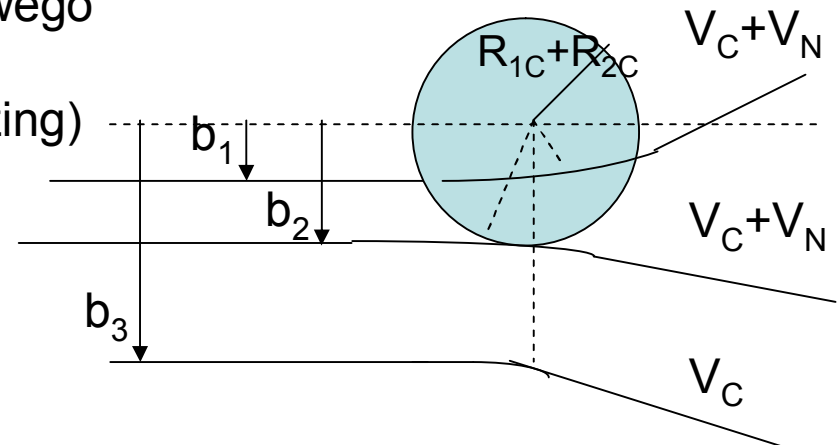
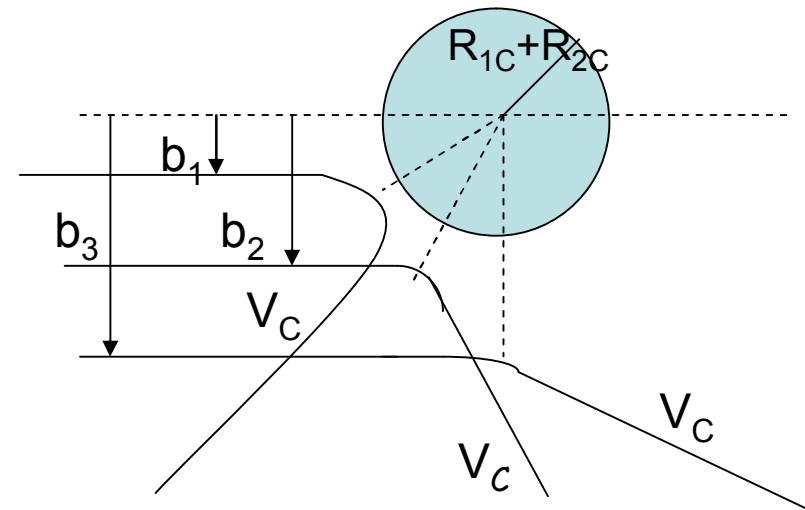
1.  $r_{min} > R_c$  - tor kulombowski  
 $b$  - duże,  
 $\theta$  - małe
2.  $r_{min} < R_c$  - wpływ potencjału jądrowego
3.  $r_{min} = R_c$  - zderzenie styczne (grazing)

$$b(r_{min} = R_c) = b_{gr}$$

$$L(r_{min} = R_c) = L_{gr}$$

$$E_{CM} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_c} + \frac{l_{gr} (l_{gr} + 1) \hbar^2}{2\mu R_c^2}$$

tory kulombowskie



Jeśli  $l_{gr} \gg 1$

$$\frac{l_{gr}^2 \hbar^2}{2\mu R_C^2} = E_{CM} - E_B$$

$$l_{gr} = \sqrt{\frac{2\mu R_C^2}{\hbar^2} (E_{CM} - E_B)} \quad l_{gr} \nearrow \quad (E_{CM} - E_B) \nearrow$$

$$\Theta(b_{gr}) = 2 \arctan \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_{CM} b_{gr}} \right) \quad \tan \frac{\Theta_{gr}}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_{CM} b_{gr}}$$

$$\frac{1}{\sin \frac{\Theta_{gr}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \frac{\Theta_{gr}}{2}} + 1} = \sqrt{1 + \left( \frac{2E b_{gr}}{Z_1 Z_2 e^2} \right)^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{2E}{Z_1 Z_2 e^2} \right)^2 \frac{2\mu R_C^2}{2\mu E} (E - E_B)}$$

$$\sin \frac{\Theta_{gr}}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{(Z_1 Z_2 e^2)^2 + 4E R_C^2 (E - E_B)}} = \frac{E_B}{\sqrt{E_B^2 + 4E^2 - 4EE_B}} = \frac{E_B}{2E - E_B}$$

$$\Theta_{gr} = \theta_{gr} = 2 \arcsin \left( \frac{E_B}{2E_{CM} - E_B} \right)$$

$$\Theta_{gr} \searrow \quad E_{CM} \nearrow$$

## Własności oddziaływania jądrowego

1. krótkozasięgowe - dla  $r_{min} > R_C$  lub  $l > l_{gr}$  brak oddziaływania jądrowego

2. silne - dla  $r_{min} < R_C$  lub  $l < l_{gr}$  silna absorpcja

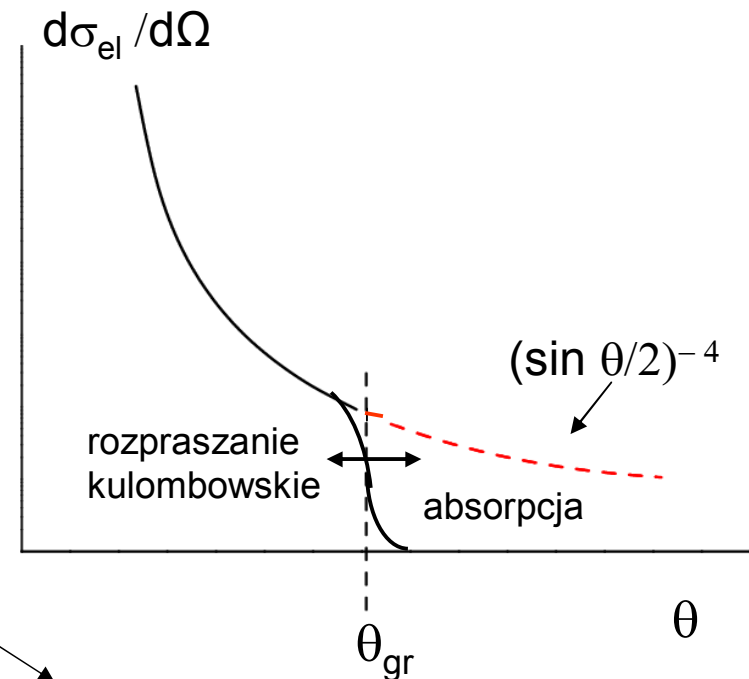
### Model silnej absorpcji

$$\left. \begin{aligned} \left. \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{rozp} \right\} &= \left. \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} \right\} & \theta \leq \theta_{gr} \quad \text{lub} \quad l \geq l_{gr} \\ &= 0 & \theta > \theta_{gr} \quad \text{lub} \quad l < l_{gr} \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_r = 2\pi \int_{\theta_{gr}}^{\pi} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} \sin\theta d\theta$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \sin^{-4} \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\sin\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$



$$\sigma_r = 2\pi \int_{\theta_{gr}}^{\pi} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{2 \cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta$$





$$\sigma_r = 2\pi \int_0^{b_{gr}} b db = 2\pi \frac{b^2}{2} \Big|_0^{b_{gr}} = \pi b_{gr}^2$$

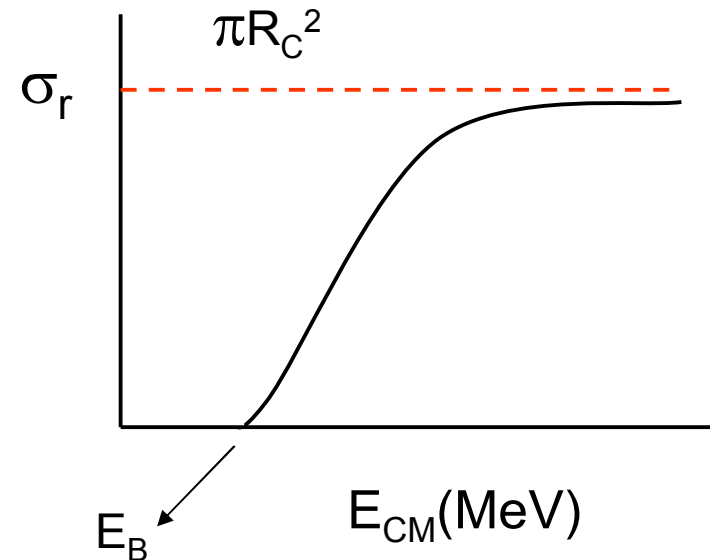
$$\hbar l_{gr} = p b_{gr}$$

$$b_{gr} = \frac{\hbar l_{gr}}{\sqrt{2\mu E_{CM}}}$$

$$l_{gr} = \sqrt{\frac{2\mu R_C^2}{\hbar^2} (E_{CM} - E_B)}$$

$$b_{gr}^2 = \frac{2\mu R_C^2 (E_{CM} - E_B)}{2\mu E_{CM}}$$

Klasyczny opis



$$\sigma_r = \pi R_C^2 \left( 1 - \frac{E_B}{E_{CM}} \right)$$

$$= 0$$

$$E_{CM} > E_B$$

$$E_{CM} \leq E_B$$

# Kwantowy opis rozpraszania

Ponieważ nie potrafimy rozwiązać problemu wielu ciał, oddziaływanie pocisku i tarczy opisujemy wykorzystując **uśredniony potencjał**, zależny jedynie **od odległości środków mas zderzających się jąder**. W ogólności potencjał ten **musi posiadać część urojona** ( w opisie kwantowym odpowiedzialną za absorpcję). Taki potencjał nazywamy **potencjałem optycznym**

$$V_{opt}(r) = V(r) + i W(r)$$

Zarówno część rzeczywista jak i urojona ma postać funkcji Saxona-Woodsa

Najprostszy przypadek – jądra bezspinowe, 1 pocisk na jednostkę objętości, Padająca funkcja falowa ma jednostkową amplitudę

$$\Psi_{pad} = e^{ikz} \quad k = \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$

Fala płaska ma ściśle określoną wartość pędu, ale może przyjmować dowolną wartość momentu pędu  $l\hbar$ , dlatego wygodnie jest wyrazić ją przez sumę sferycznych fal parcjalnych odpowiadających określonej wartości momentu pędu (różnym parametrom zderzenia b).

Dla  $kr \gg 1$

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \frac{e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})}}{kr 2i}$$

fala kulista rozchodząca się ze środka układu

fala kulista schodząca się ze środka układu

Funkcja falowa kanału wyjściowego jest rozwiązaniem równania Schrödingera

$$\nabla^2 \Psi + \left[ k^2 - \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \right) V(r) \right] \Psi = 0$$

w reprezentacji fal parcjalnych

dla  $r \rightarrow \infty$

$$\Psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \qquad \Psi = \frac{1}{kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \frac{\eta_{\ell} e^{i(kr - \frac{\ell\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{\ell\pi}{2})}}{2i}$$

$f(\theta)$  – amplituda rozpraszania (ze względu na symetrię osiową potencjału zależna tylko od kąta  $\theta$ )

$\eta_{\ell}$  – współczynnik rozpraszania

część rzeczywista  $\eta_{\ell}$  - decyduje o zmianie amplitudy fali rozchodzącej

część urojona  $\eta_{\ell}$  - przesunięcie fazy fali rozchodzącej się w stosunku do fali padającej

W przypadku elastycznego rozpraszania  $|\eta_{\ell}| = 1$

$$\Psi_{rozp} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \Psi - e^{ikz} = \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) (\eta_{\ell} - 1) e^{i(kr - \ell\pi/2)}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) (\eta_{\ell} - 1) e^{-i\ell\pi/2} \quad \begin{array}{l} e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \\ e^{i\ell\pi/2} = i^{\ell} \end{array}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos\theta) (\eta_{\ell} - 1)$$

Strumień cząstek przechodzących przez jednostkę powierzchni na jednostkę czasu

$$S = \frac{\hbar}{2mi} \left( (\nabla\Psi)\Psi^* - (\nabla\Psi^*)\Psi \right)$$

dla fali płaskiej

$$S = \frac{\hbar}{2mi} \left[ ike^{ikz} e^{-ikz} - (-ik)e^{-ikz} e^{ikz} \right] = \frac{\hbar}{2mi} 2ik = \frac{\hbar k}{m} = v$$

dla fali rozproszonej

$$S = \frac{|f(\theta)|^2 v}{r^2}$$

Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie w kierunku  $(\theta, \phi)$  w kącie bryłowym  $d\Omega = dS/r^2$  równa się stosunkowi liczby cząstek rozproszonych przechodzących w jednostce czasu przez powierzchnię  $dS$ , do strumienia cząstek padających

$$d\sigma_{rozp}(\theta, \phi) = \frac{S_{rozp} dS}{S_{pad}} = \frac{|f(\theta)|^2 v dS}{r^2 v} = \frac{|f(\theta)|^2 dS}{r^2}$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{rozp} = |f(\theta)|^2 \quad f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta) (\eta_{\ell} - 1)$$

Rozdzielamy oddziaływanie kulombowskie od jądrowego

$$\eta_{\ell} = A_{\ell} \exp[-2i(\sigma_{\ell} + \delta_{\ell})]$$

$A_{\ell}$  – opisuje absorpcję z kanału elastycznego

$\sigma_{\ell}$ ,  $\delta_{\ell}$  – odpowiednio kulombowskie i jądrowe przesunięcia fazowe

Dla każdej fali parcjalnej

$$f_{\ell}(\theta) = f_{C,\ell}(\theta) + f_{N,\ell}(\theta)$$

1. Jedynie oddziaływanie kulombowskie  $A_l = 1, \delta_l = 0$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el} = |f_c(\theta)|^2$$

2. Oddziaływanie kulombowskie + jądrowe

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el} = |f_c(\theta) + f_N(\theta)|^2$$

Ogólnie  $A_l \leq 1$

$$\sigma_{rozp} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi f(\theta) f^*(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\sigma_{el} = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{(2k)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) (\eta_\ell - 1) \sum_{\ell_1=0}^{\infty} (2\ell_1+1) P_{\ell_1}(\cos\theta) (\eta_{\ell_1} - 1)^* \sin\theta d\theta$$

Wielomiany Legendra spełniają warunek ortogonalności  $\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta) P_{\ell_1}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell_1}$

$$\sigma_{rozp} = \frac{2\pi}{(2k)^2} 2 \sum_{\ell} \frac{(2\ell+1)^2}{2\ell+1} (\eta_\ell - 1) (\eta_\ell - 1)^* = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) |\eta_\ell - 1|^2$$

$$\sigma_{rozp} = \sum_{\ell} \sigma_{rozp, \ell}$$

$$\sigma_{rozp, \ell} = \pi \tilde{\lambda}^2 (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2$$

parcjalny przekrój czynny

$\sigma_r$  – przekrój czynny reakcji

stosunek liczby cząstek usuniętych z wiązki do wszystkich cząstek padających na jednostkę powierzchni w jednostce czasu.

Strumień cząstek padających  $N = v$

Liczba cząstek usuniętych z wiązki

$$n = -\frac{\hbar R_0^2}{2im} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{d\Psi}{dr} \Psi^* - \frac{d\Psi^*}{dr} \Psi \right) \Big|_{r=R_0} \sin\theta d\theta d\phi$$

$\Psi$ - funkcja falowa kanału wyjściowego

$$n = v\pi \hat{\lambda}^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1)(1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

$$\sigma_r = \sum_{\ell} \sigma_{r,\ell} = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1)(1 - |\eta_{\ell}|^2)$$

$$\sigma_{r,\ell} = \pi \hat{\lambda}^2 (2\ell + 1) \underbrace{(1 - |\eta_{\ell}|^2)}_{T_{\ell}} \quad |\eta_{\ell}| \leq 1$$

$T_{\ell} \rightarrow$  współczynnik transmisji

Współczynniki transmisji  $T_l$  wyznacza się poprzez rozwiązanie równania Schrödingera dla potencjału optycznego

Model „czarnego jądra”  
 „ostrego obcięcia”

$$\begin{array}{lll}
 l \geq l_{gr} & A_l = 1 & |\eta_l| = 1 \\
 l < l_{gr} & A_l = 0 & \eta_l = 0
 \end{array}$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{rozp} = |f_C(\theta) + f_j(\theta)|^2$$

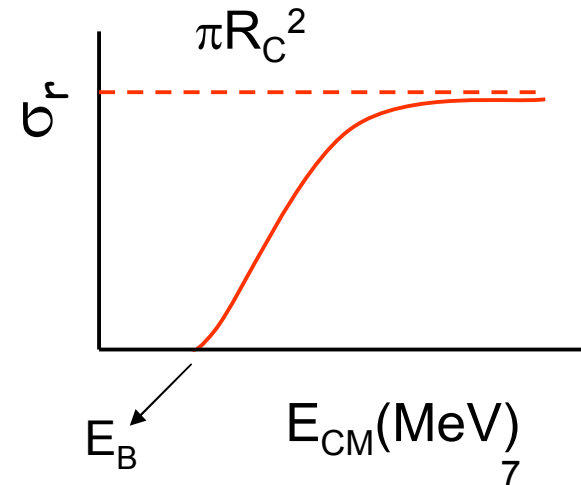
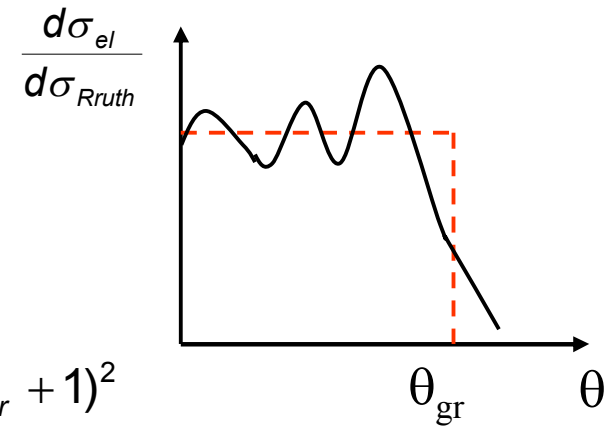
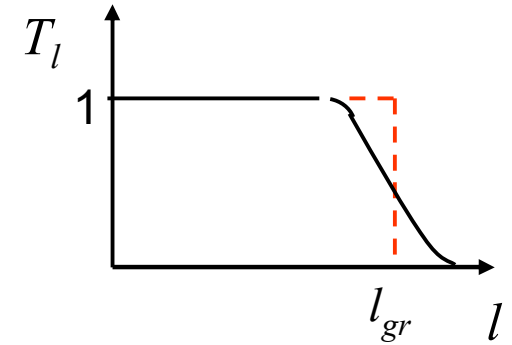
$$\sigma_r = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-|\eta_l|^2) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{gr}} (2l+1) = \pi \tilde{\lambda}^2 (l_{gr} + 1)^2$$

$$l_{gr} \gg 1 \quad l_{gr} = \sqrt{\frac{2\mu R_C^2}{\hbar^2} (E - E_B)}$$

$$\sigma_r = \pi \tilde{\lambda}^2 l_{gr}^2 = \pi \tilde{\lambda}^2 \frac{2\mu R_C^2 (E - E_B)}{\hbar^2}$$

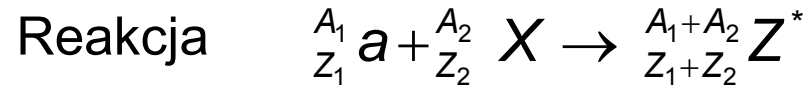
$$\sigma_r = \pi R_C^2 \frac{E - E_B}{E} = \pi R_C^2 \left(1 - \frac{E_B}{E}\right)$$

$$\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\hbar}\right)^2 = \frac{1}{2\mu E}$$





# Reakcje fuzji wywołane przez ciężkie jony



gdy tracimy możliwość identyfikacji zderzających się w kanale wejściowym partnerów mówimy, że powstał **układ złożony**.

utworzenie układu złożonego  $\neq$  utworzeniu jądra złożonego

Warunkiem koniecznym na utworzenie jądra złożonego jest minimum w całkowitym potencjale oddziaływania jądro-jądro. Gdy jądro  $Z^*$  żyje dostatecznie długo ( $10^{-19}$  s do  $10^{-16}$  s) i osiąga **stan równowagi termodynamicznej** mówimy o utworzeniu **jądra złożonego  $CN^*$**  (reakcja fuzji).

$$\sigma_{fus}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1) T_{\ell}(E) P_{CN}(E, \ell)$$

$P_{CN}(E, \ell)$  – prawdopodobieństwo utworzenia jądra złożonego.

energia potrzebna do utworzenia CN w stanie podstawowym

$$E_{CN}^* = E_{CM} + Q_{fus}$$

$$Q_{fus} = M_{CN} c^2 - (M_X + M_a) c^2$$

$$0 \leq J_{CN} \leq l + I_a + I_X$$

Reakcje fuzji:

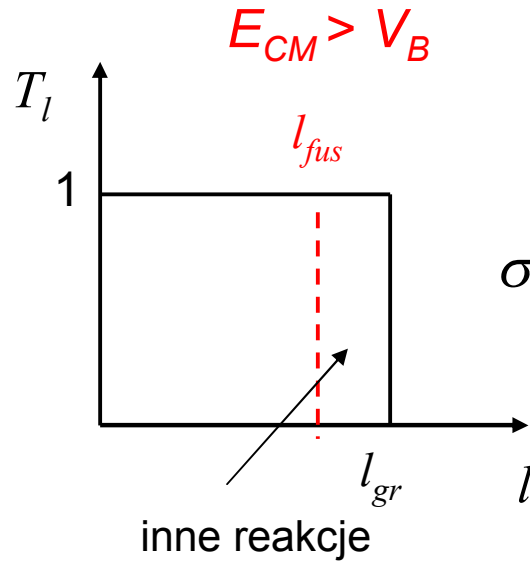
1.  $E_{CM} > V_B$

2.  $E_{CM} \leq V_B$

Bardzo dobra lokalizacja pakietu falowego  $\tilde{\lambda} \ll R$  **opis klasyczny**

**Opis kwantowy** – efekt tunelowania przez barierę

Zakładamy  $P_{CN} = 1$  (inne przypadki przedyskutujemy później)



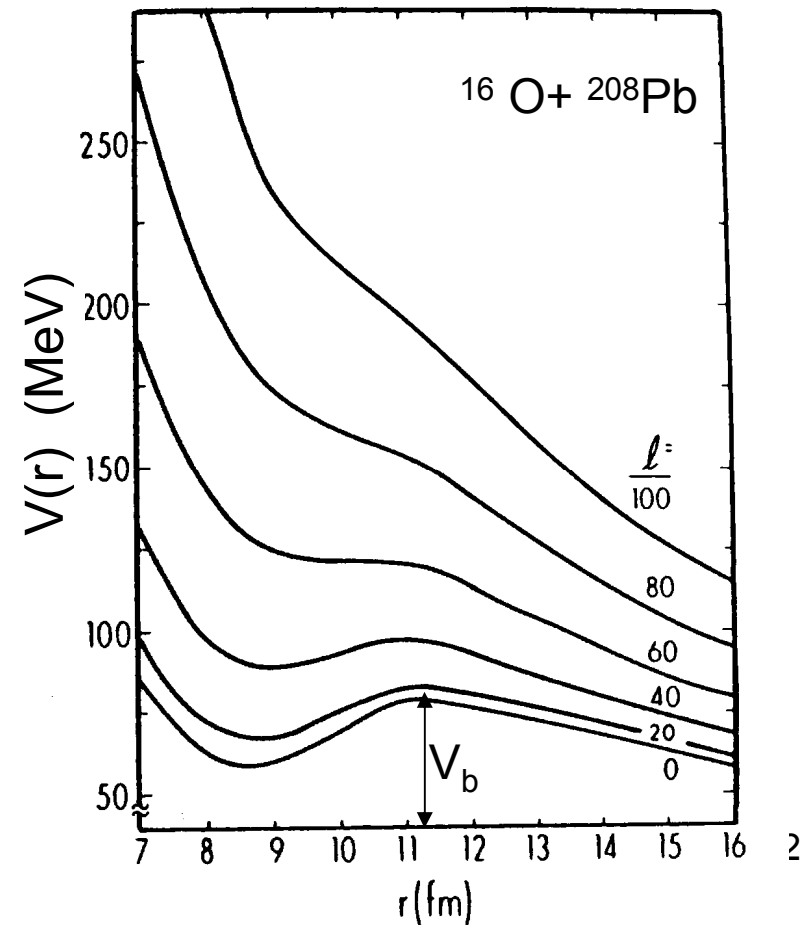
- duża wartość  $E_{CN}^*$
- duża wartość spinu utworzonego jądra złożonego
- możliwość stosowania modelu „ostrego obcięcia”

$$\sigma_{fus} = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_l = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{fus}} (2l+1) = \pi \tilde{\lambda}^2 (l_{fus} + 1)^2$$

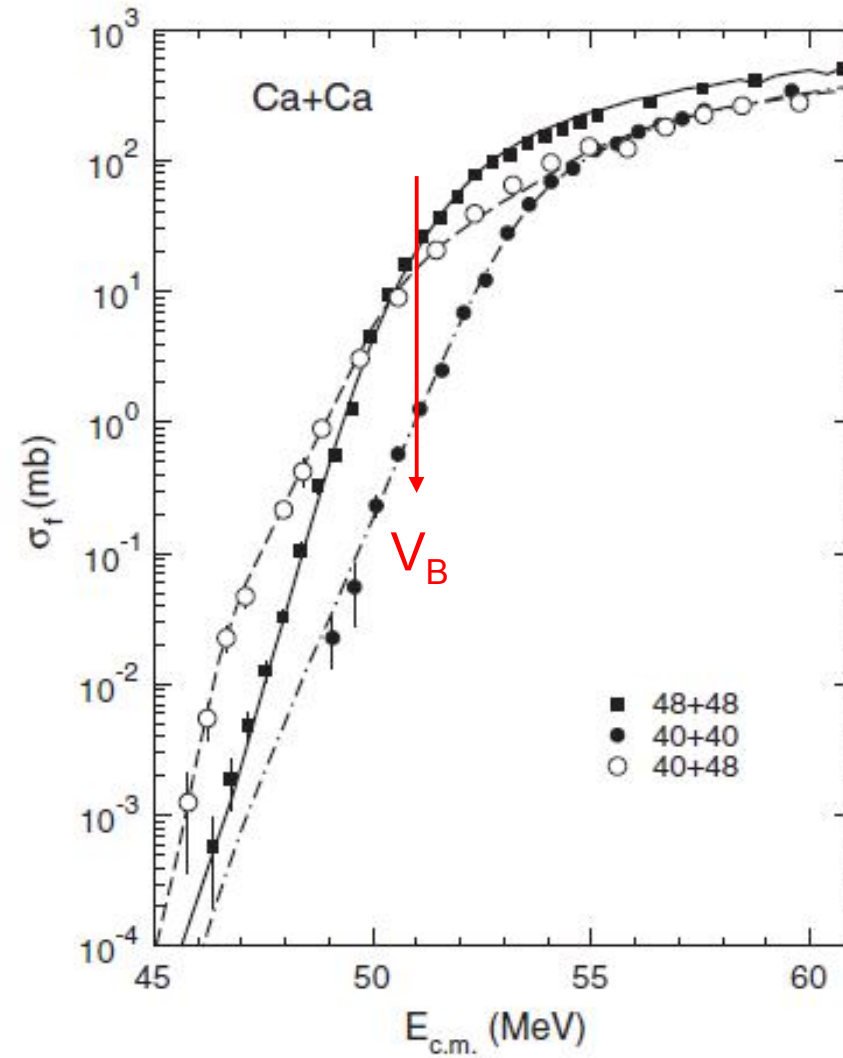
$$l_{fus} = \sqrt{\frac{2\mu R_B^2}{\hbar^2} (E_{CM} - V_B)}$$

$$R_B \approx 1.3 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \text{ fm}$$

$$\sigma_{fus} = \pi R_B^2 \left(1 - \frac{V_B}{E_{CM}}\right)$$



Model ostrego obcięcia nie uwzględnia możliwości zajścia reakcji dla  $E_{CM} \leq V_B$ .



## Uwzględnienie tunelowania przez barierę (opis kwantowy)

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_\ell(r) \right) \psi = E \psi \quad \text{dla bariery potencjalnej w kształcie odwróconej paraboli}$$

$$V_\ell(r) = V_{B,\ell} - \frac{1}{2} \mu \omega_{B,\ell}^2 (r - r_B)^2$$

gdzie:

$V_{B,\ell}$  - wysokość bariery,

$R_{B,\ell}$  - pozycja bariery

$\omega_{B,\ell}$  - krzywizna potencjału

$$V_{B,\ell} = V_B + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu R_{B,\ell}^2}$$

$$\omega_{B,\ell}^2 = \left. \frac{1}{\mu} \frac{d^2}{dr^2} \left( V_B(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\mu r^2} \right) \right|_{R_{B,\ell}}$$

w przybliżeniu WKB (semiclassical)

$$T_\ell(E) = \frac{1}{1 + \exp[2\pi(V_{B,\ell} - E)/\hbar\omega_{B,\ell}]}$$

formuła Hill'a-Wheeler'a

Parametry:  $R_{B,\ell}$  i  $\omega_{B,\ell}$  słabo zależne (szczególnie dla ciężkich układów) od  $E$  i  $\ell$

$$\sigma_{fus}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) T_\ell(E) \approx 2\pi \tilde{\lambda}^2 \int_0^{\infty} \frac{\ell d\ell}{1 + \exp\left\{ \frac{2\pi}{\hbar\omega_B} \left[ V_B + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2\mu R_B^2} - E \right] \right\}}$$

$$\sigma_{fus}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) T_{\ell}(E) \approx 2\pi \tilde{\lambda}^2 \int_0^{\infty} \frac{\ell d\ell}{1 + \exp\left\{ \frac{2\pi}{\hbar\omega_B} \left[ V_B + \frac{\hbar^2 \ell^2}{2\mu R_B^2} - E \right] \right\}}$$

oznaczymy:  $y = \ell^2$ ,  $a = \exp[2\pi(V_B - E)/\hbar\omega_B]$ ,  
 $b = \pi \hbar / (\mu R_B^2 \omega_B)$

$$\sigma_{fus} = \pi \tilde{\lambda}^2 \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + a \exp(b y)} = \pi \tilde{\lambda}^2 \frac{\ln(1 + 1/a)}{b} = \frac{\hbar \omega_B R_B^2}{2E} \ln \left\{ 1 + \exp \left( \frac{2\pi(E - V_B)}{\hbar \omega_B} \right) \right\}$$

$$\frac{\pi \tilde{\lambda}^2}{b} = \frac{\pi \tilde{\lambda}^2 \mu R_B^2 \omega_B}{\pi \hbar} = \frac{\pi \tilde{\lambda}^2 \mu R_B^2 \omega_B \hbar}{\pi \hbar^2} = \frac{\hbar \omega_B R_B^2}{2E} \quad \left( \frac{\tilde{\lambda}}{\hbar} \right)^2 = \frac{1}{2\mu E}$$

formuła Wong'a  
 C.Y. Wong  
 PRL31(1973)766

dla  $E > V_B$  można pominąć 1 w argumencie  $\ln$   
 dla  $E < V_B$ ,  $\ln$  rozwijamy w szereg

$$\sigma_{fus} = \begin{cases} \pi R_B^2 \left[ 1 - \frac{V_B}{E} \right] & \text{dla } E_{CM} > V_B \\ \left( \frac{\hbar \omega_B R_B^2}{2E} \right) \exp \left[ \frac{-2\pi(V_B - E)}{\hbar \omega_B} \right] & \text{dla } E_{CM} < V_B \end{cases}$$

Nowe bardzo czułe metody eksperymentalne pozwalają zmierzyć przekroje czynne na reakcję fuzji do wartości  $\sigma_{fus}$  rzędu  $\mu b$ . Wyraźne odstępstwa od formuły Wonga do kilku rzędów wielkości.

### Rozkład kątowy ER

$$\theta_{lab}(CN) \approx 0^\circ$$

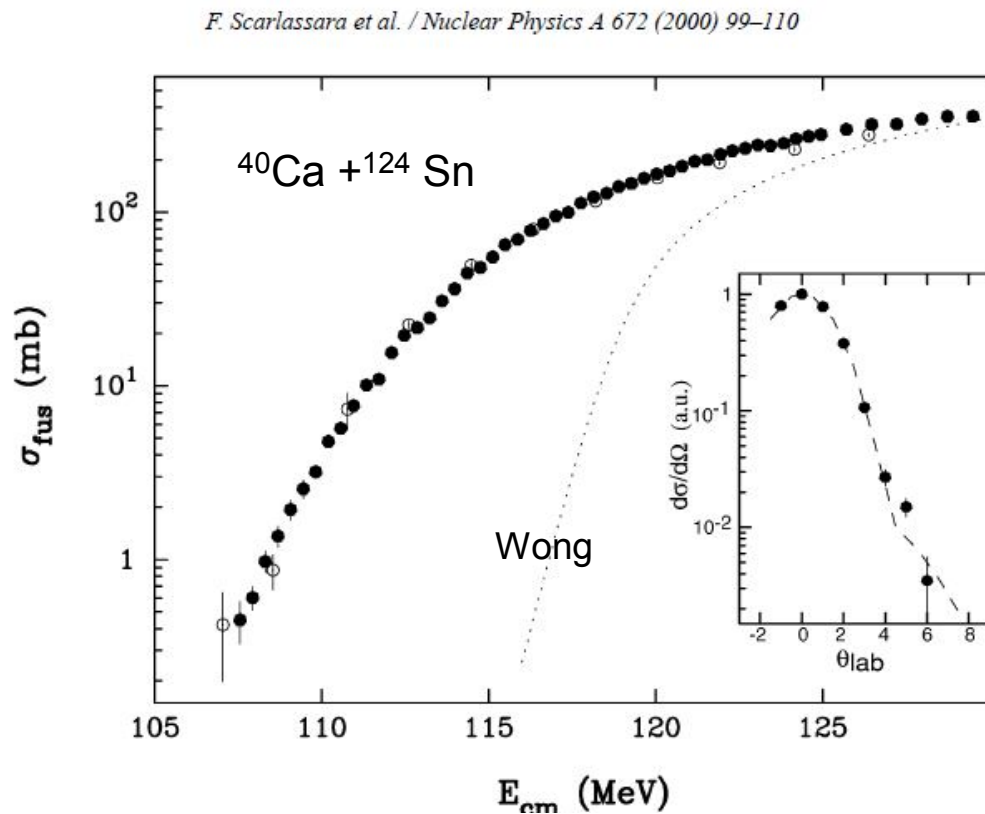
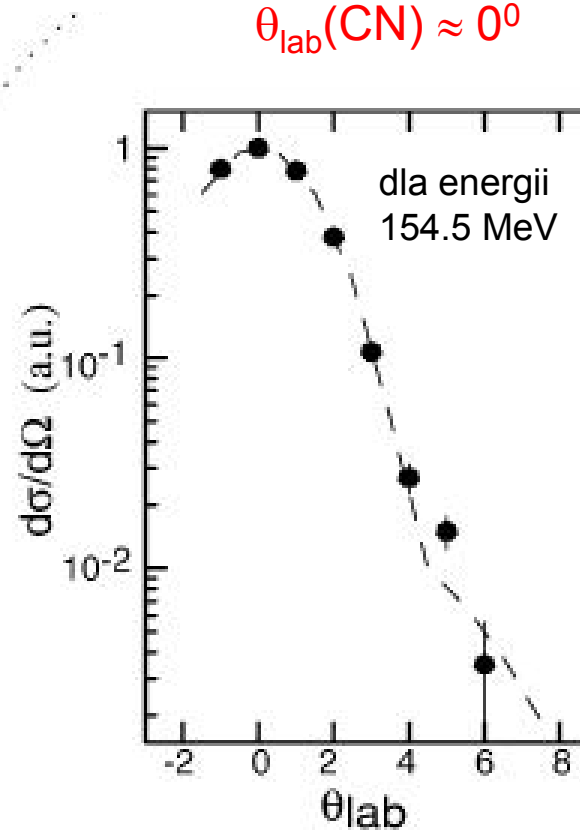


Fig. 1. Fusion excitation function for  $^{40}\text{Ca} + ^{124}\text{Sn}$  (full circles) and  $^{40}\text{Ca} + ^{116}\text{Sn}$  (open circles). The latter data have been corrected for the different Coulomb barrier (a shift  $-1.7$  MeV) and for the different barrier radius (a factor 1.03 in the cross section) for a better comparison of the two systems.



Rozmycie – odrzut po wyparowaniu lekkich cząstek

Wiele efektów może wpłynąć na modyfikacje (wzmocnienie) przekrojów czynnych na fuzję w obszarze tzw. „energii podbarierowych”

- deformacja statyczna zderzających się jąder
- wibracje powierzchni jąder
- wzbudzenia jedno, .....i wielofononowe
- sprzężenia do kanałów transferu nukleonowego

Te efekty próbuje się uwzględnić w metodzie kanałów sprzężonych (coupled channel - CCFULL). Uwzględnienie wszystkich kanałów jest bardzo trudne a obliczenia niezwykle czasochłonne

Wszystkie wymiewnione efekty wpływają na rozmycie bariery. Opis zakładający stałą wartość bariery staje się nieprawidłowy.

Bardzo przydatne do poznania zależności przekrojów czynnych od energii w pobliżu bariery kulombowskiej jest badanie tzw. „rozkładu barier”

## Rozkłady barier

Dwie równoważne metody:

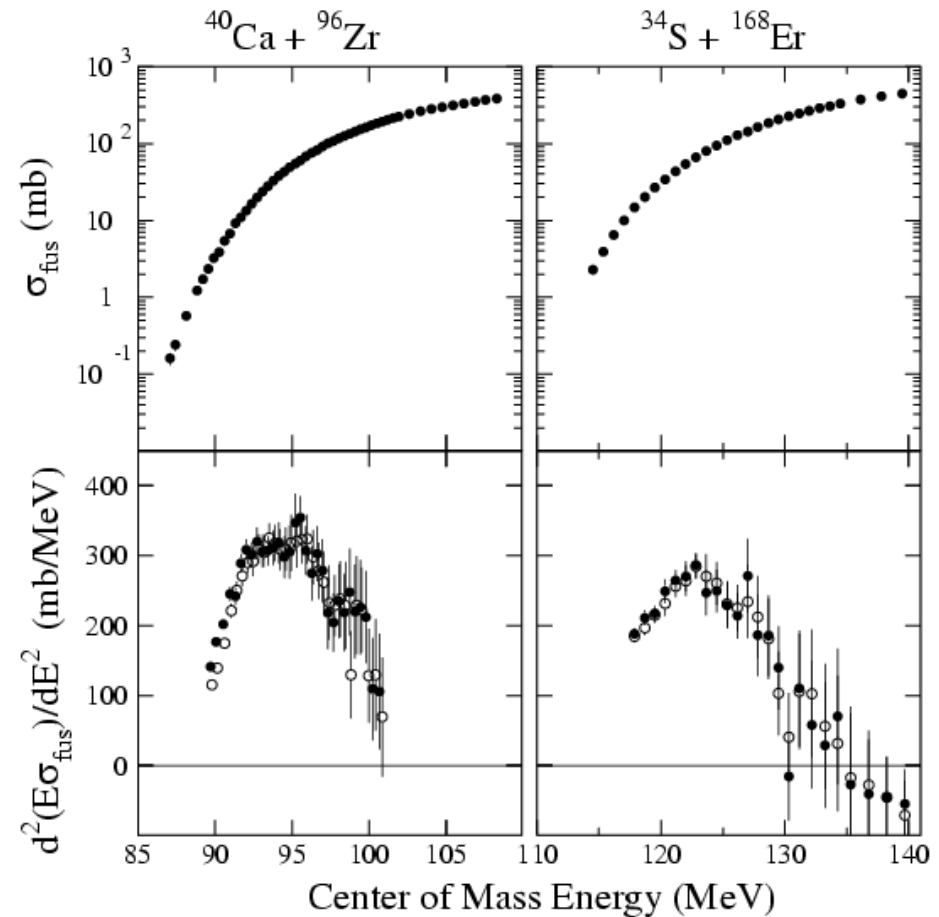
$$1. \quad B(E) = \frac{d^2(E\sigma_f(E))}{d^2E}$$

N. Rowley, G.R. Satchler and P.H. Stelson, Phys. Lett. B254, 25 (1991)

Metoda różniczkowa

$$\frac{d^2(E\sigma_f)}{d^2E} = 2 \left( \frac{(E\sigma_f)_3 - (E\sigma_f)_2}{E_3 - E_2} - \frac{(E\sigma_f)_2 - (E\sigma_f)_1}{E_2 - E_1} \right) \left( \frac{1}{E_3 - E_1} \right)$$

$$\Delta E = E_3 - E_1 \approx 2(E_2 - E_1) \approx (2 \div 4) \text{ MeV}$$





(H. Esbensen and C.L. Jaing, PRC 79,064619 (2009))

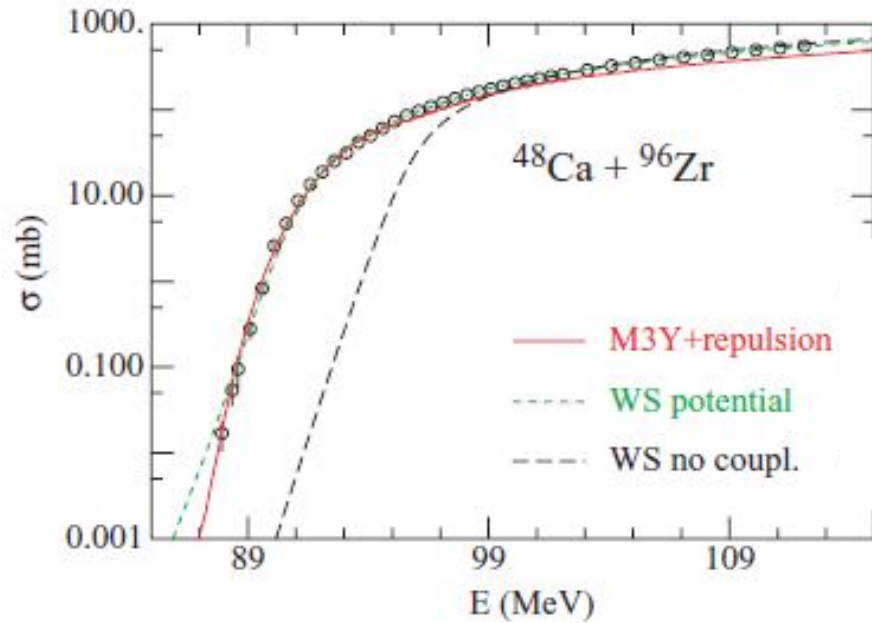


FIG. 2. (Color online) Measured fusion cross sections for  $^{48}\text{Ca} - ^{96}\text{Zr}$  [6,7] are compared to coupled-channels calculations based on the Woods-Saxon (WS, green dashed curve) and M3Y + repulsion (red solid curve) potentials. The lowest dashed (black) curve is the no-coupling limit for the WS potential.

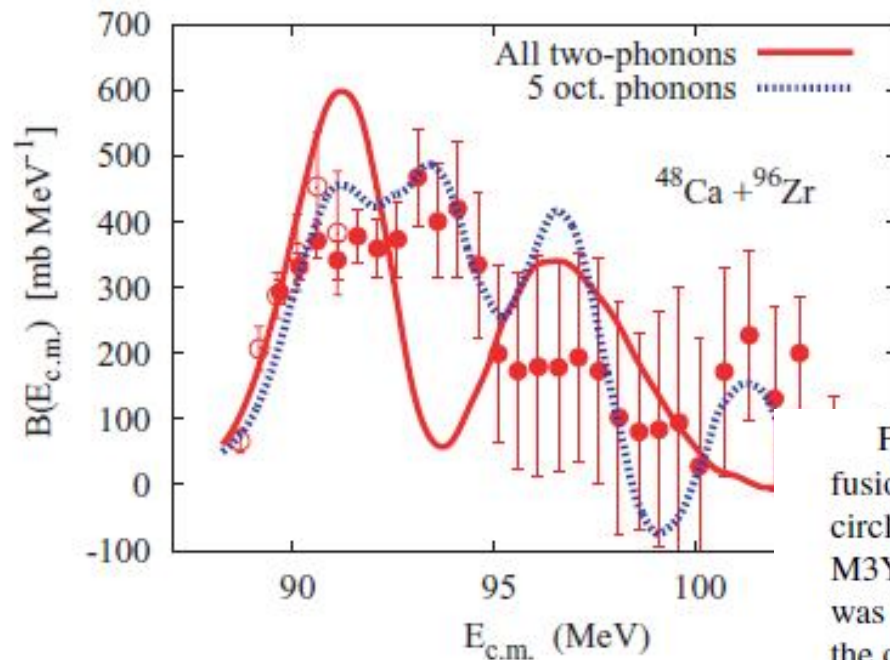
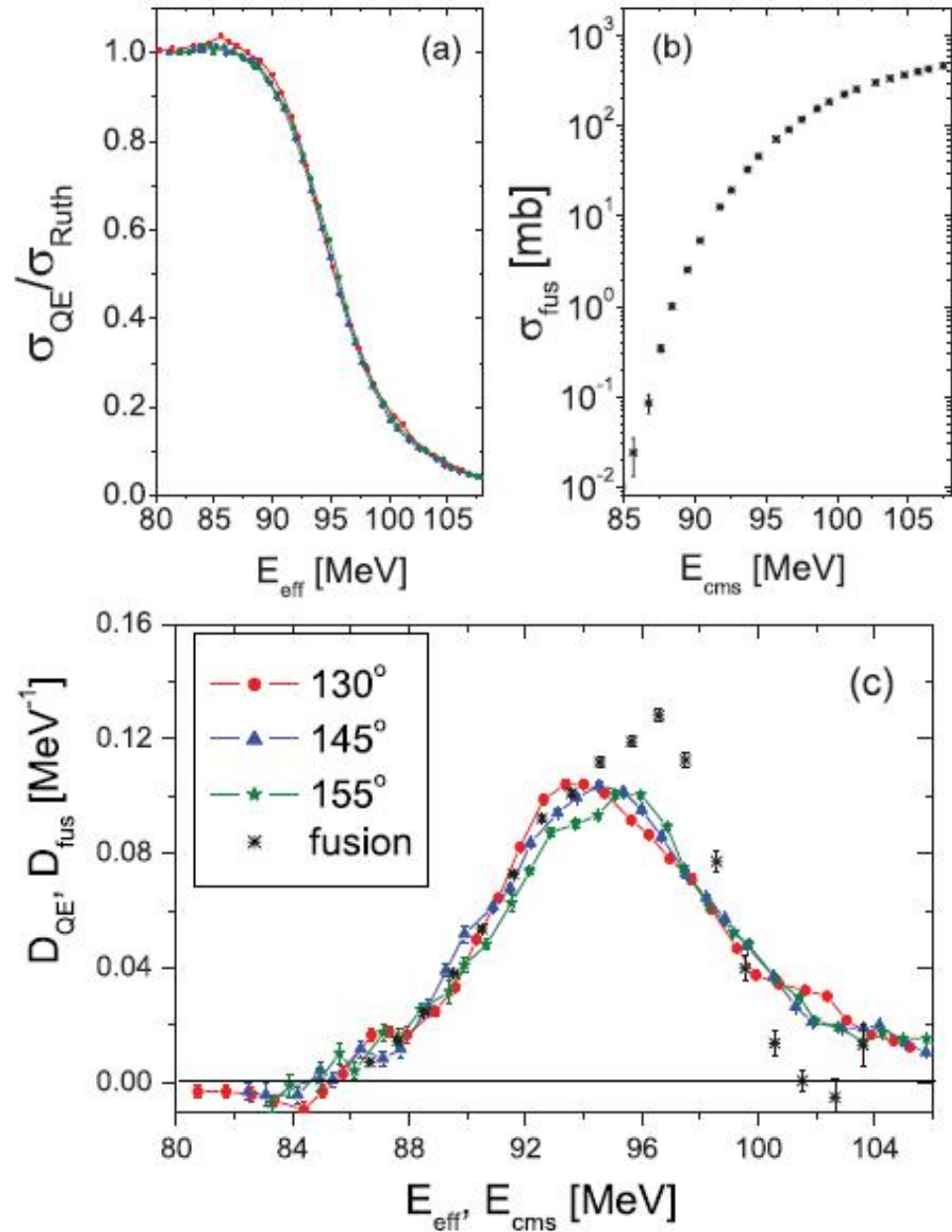


FIG. 3. (Color online) Barrier distributions obtained from the fusion cross sections shown in Fig. 2 using  $\Delta E = 2$  MeV (open circles for  $\Delta E = 1$  MeV). The red solid curve was derived from the M3Y + repulsion calculation shown in Fig. 2. The blue dashed curve was obtained from a calculation that includes up to five phonons of the octupole excitation in  $^{96}\text{Zr}$ .

$$2. \quad B_{qel}(E) = -\frac{d}{dE} \left( \frac{\sigma_{qel}}{\sigma_{Ruth}} \right)$$

$\sigma_{qel}$  suma przekrojów czynnych wszystkich procesów poza reakcją fuzji (tj. rozpraszanie elastyczne + nieelastyczne + reakcje wprost)

FIG. 2. (Color online) Excitation functions (upper panels) of the QE backscattering (a) and fusion (b) obtained for the  $^{20}\text{Ne} + ^{208}\text{Pb}$  system. The lower panel (c) presents the quasielastic and fusion barrier distributions as functions of  $E_{\text{eff}}$  and  $E_{\text{cms}}$ , respectively. Different symbols refer to different laboratory detector angles. Lines connect experimental points to guide the eye.



E. Piasecki et al. Phys. Rev. C80, (2009) 054613  
 E. Piasecki et al. Phys. Rev. C85, (2012) 054608

Jeśli interesuje nas jedynie rząd wielkości przekroju czynnego na fuzję bardzo przydatne są **formuły fenomenologiczne**, bazujące na dopasowaniu prostych modeli do bardzo bogatego zbioru danych eksperymentalnych

Proste wyrażenia do obliczenia krzywych wzbudzenia na sklejenie

K. Siwek-Wilczyńska, J. Wilczyński Phys. Rev. C 69 (2004) 024611

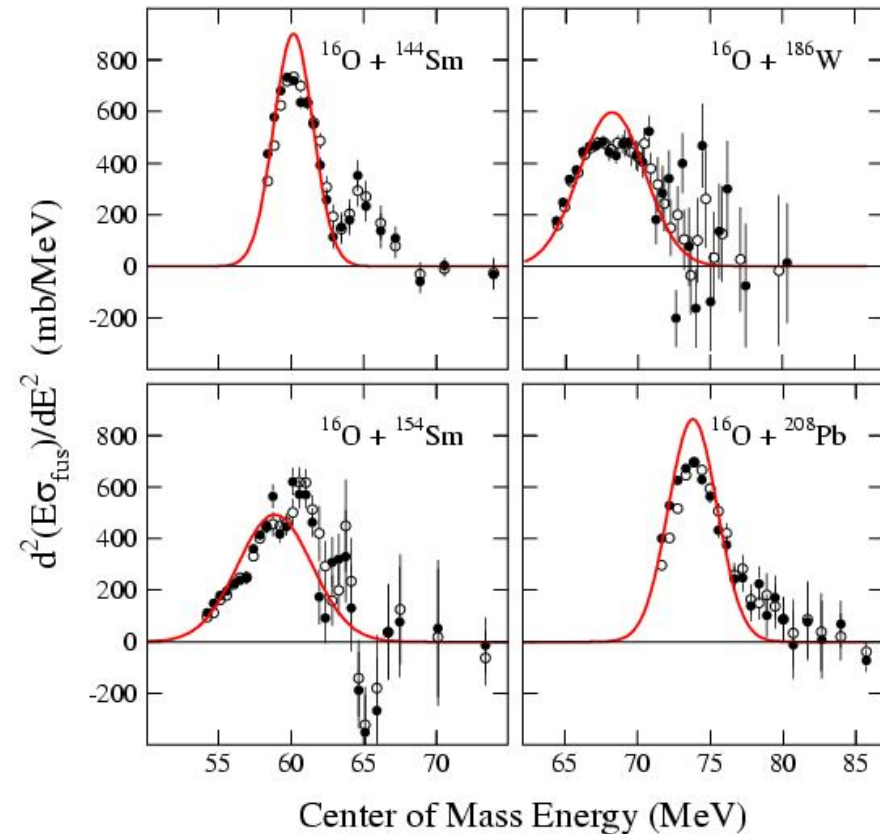
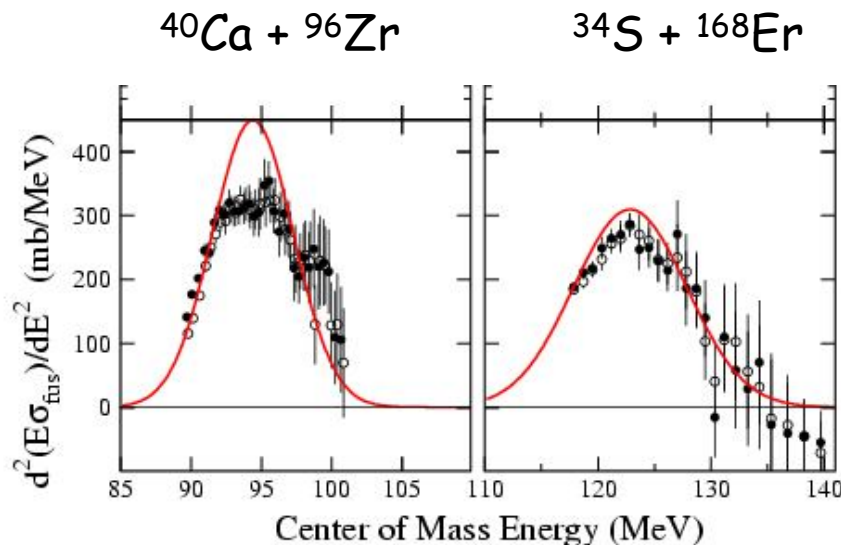
Założenia:

- Gaussowski rozkład barier

$$p(B) = \frac{1}{w\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(B - B_0)^2}{2w^2}\right]$$

$B_0$  - średnia wysokość bariery,  
 $w$  - szerokość rozkładu barier.

— dopasowanie funkcji Gaussa



- sklejanie (fuzja) = pokonanie bariery B, opisane klasycznym wyrażeniem

$$\sigma_{fus}(E, B) = \pi R_{\sigma}^2 (1 - B/E) \quad R_{\sigma} - \text{promień bariery.}$$

Całkowanie po wszystkich możliwych wysokościach bariery

$$\sigma_{fus}(E) = \int_{-\infty}^E \sigma_{fus}(E, B) p(B) dB$$

Przekrój czynny na proces **fuzji/sklejenia** dla "rozmytej bariery"

$$\sigma_{cap}(E) = \pi R_{\sigma}^2 \left[ X \sqrt{\pi} (1 + \text{erf } X) + \exp(-X^2) \right] \frac{w}{E \sqrt{2\pi}}$$

gdzie:  $X = \frac{E - B_0}{w \sqrt{2}}, \quad \text{erf } X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-t^2} dt$  Gaussowska funkcja błędu

Trzy wolne parametry  $B_0, w, R_{\sigma}$ .

Dla dowolnego układu wyznaczane z systematyki uzyskanej poprzez dopasowanie formuły do 50 eksperymentalnie wyznaczonych około barierowych krzywych wzbudzenia na reakcje fuzji w zakresie  $40 < Z_{CN} < 98$

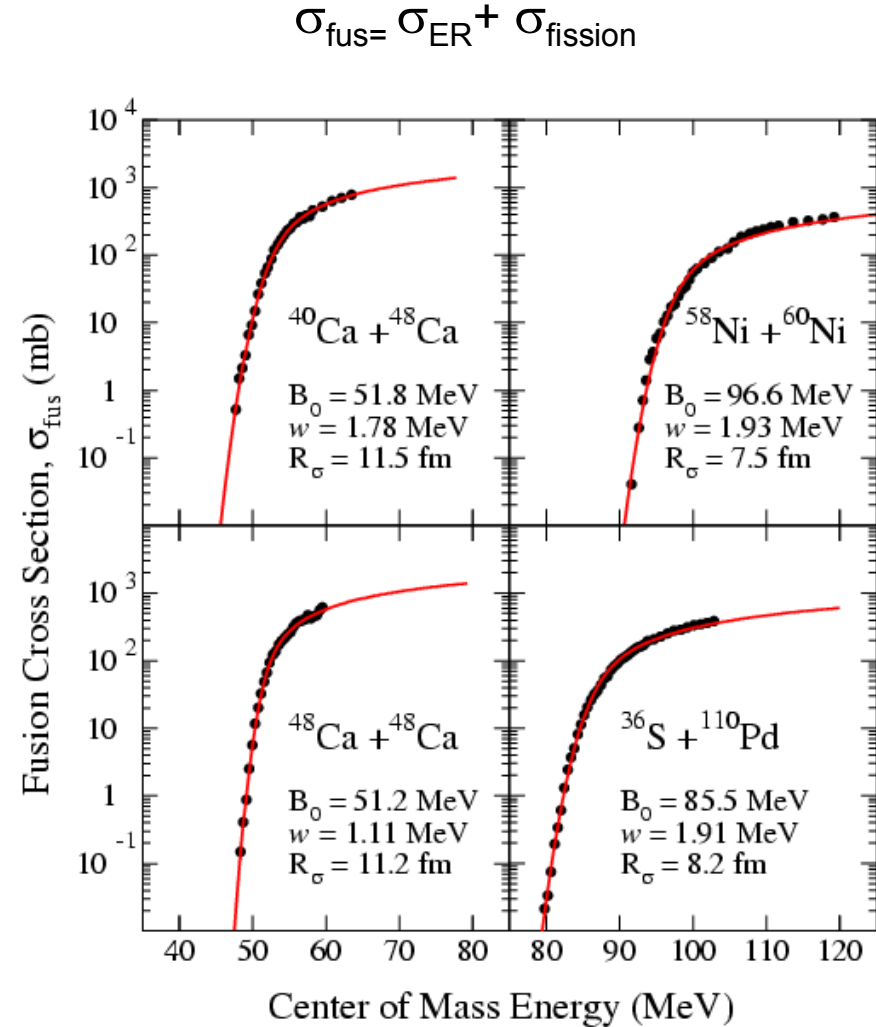
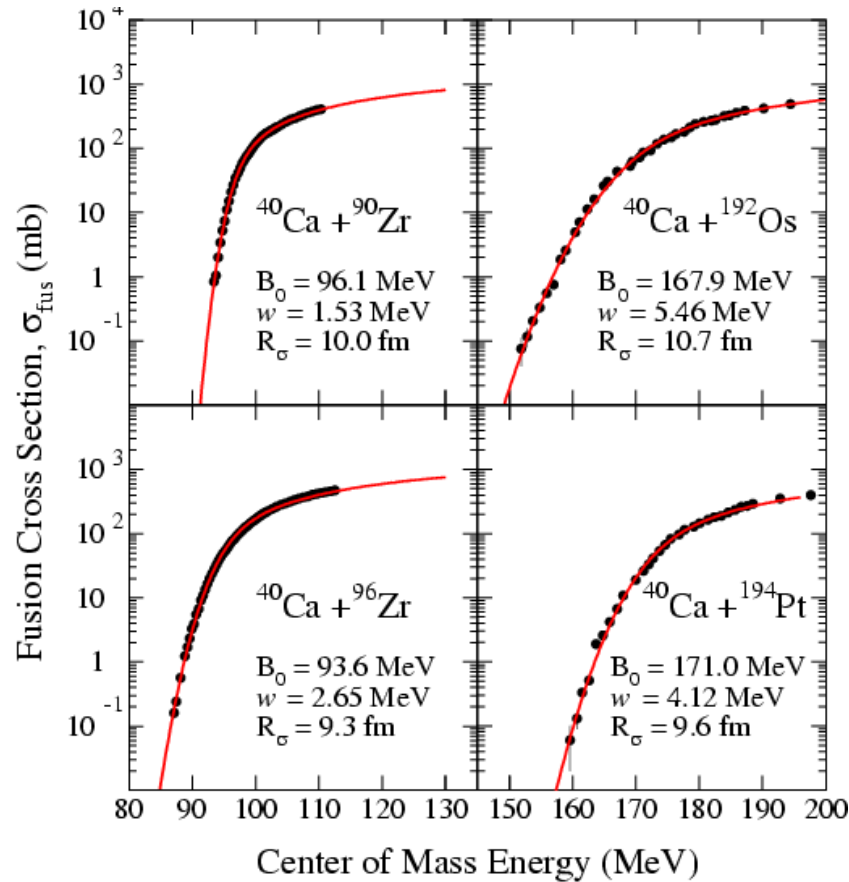
$$B_0 = 0.853315 z + 0.0011695 z^2 - 0.000001544 z^3 \quad z = Z_1 Z_2 / (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$$

$$R_{\sigma} = 1.16 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \text{ fm}$$

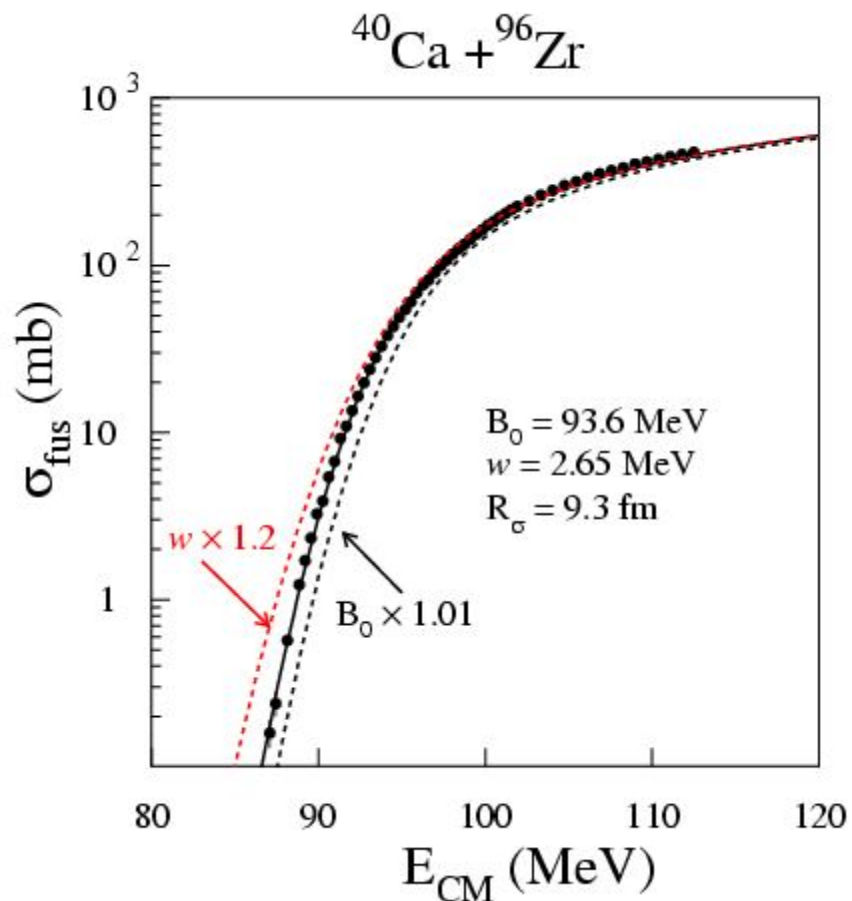
$$w = C B_0 \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_0^2} \quad w_i^2 = \frac{R_i^2 \beta_{2i}}{4\pi} \quad \beta_{2i} \begin{matrix} \nearrow \\ \text{parametr deformacji} \\ \text{kwadrupolowej} \end{matrix}$$

$$C = 0.0421 \text{ fm}^{-1}, w_0 = 0.531 \text{ fm}^{-1}$$

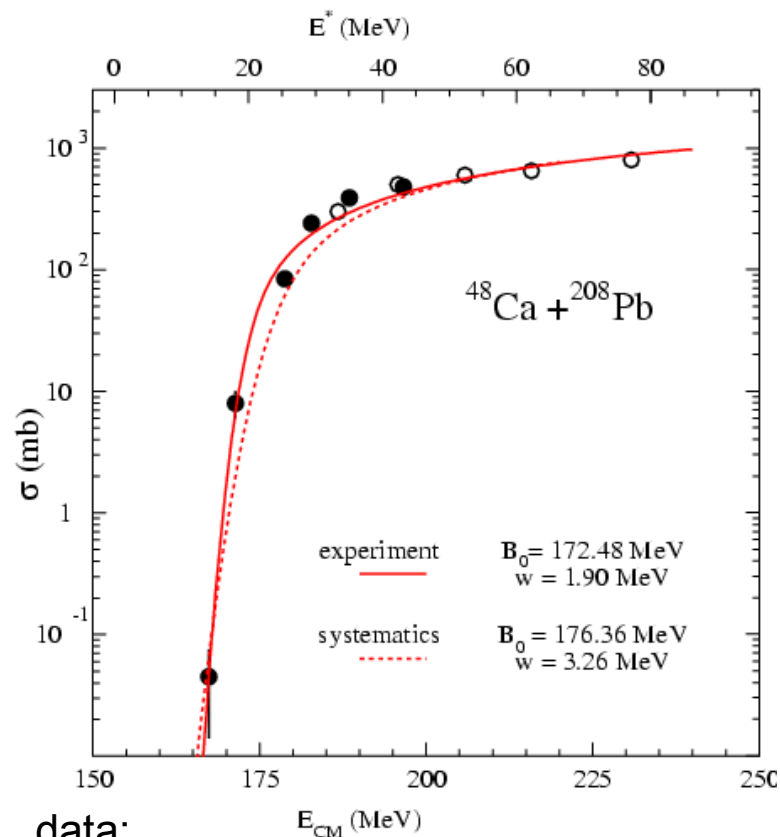
Trójparametryczne dopasowanie metodą minimalizacji  $\chi^2$  do 50 eksperymentalnie wyznaczonych krzywych wzbudzenia dla energii pod- oraz przy-barierowych. Założenie  $P_{CN}=1$



# Wpływ dokładności parametrów na kształt krzywej wzbudzenia



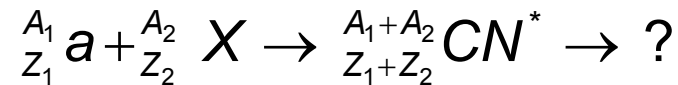
$$\sigma_{\text{fus}} = \sigma_{\text{ER}} + \sigma_{\text{fission}}$$



data:

- $\sigma_{\text{fission}}$  Yu. Ts. Oganessian,  
private communication
- $\sigma_{\text{fission}}$  R. Bock et al.,  
Nucl. Phys. A 388 (1992) 334

## Rozpad jądra złożonego



- **Emisja (wyparowanie) lekkich cząstek** (neutralnych i naładowanych).  
Pozostałość jądra złożonego – ER lub EVR
- **Rozszczepienie** (dwa duże fragmenty). Temu procesowi towarzyszy zazwyczaj emisja lekkich cząstek, głównie neutronów, zarówno z rozszczepiającego się  $CN^*$  jak i obu fragmentów.
- **Emisja promieniowania  $\gamma$** . Dla dużych  $E_{CN^*}$  - nie odgrywa roli. Zaczyna dominować na końcu kaskady gdy  $E^* \leq B_i$  ( $B_i$  –energia wiązania dowolnej cząstki lub bariera na rozszczepienie)

Głównym czynnikiem określającym sposób rozpadu jądra złożonego (konkurencja wyparowania i rozszczepienia) jest **energia rozpadu  $\mathcal{B}$** . Ważną rolę odgrywa również **deformacja** i wartość **spinu  $J_{CN}$** .

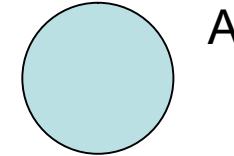
# Energia rozpadu i jej wpływ na sposób rozpadu jądra (W.J. Świątecki J. de Physique 33C 5-45 (1972))

Na gruncie **modelu kropowego**

Całkowita energia jądra o liczbie masowej  $A$  i liczbie atomowej  $Z$

$$E(A) = [ZM_p + (A-Z)M_n] c^2 - B_A$$

$B$  – energia wiązania



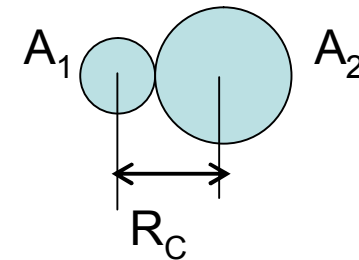
Całkowita energia stykających się jąder o liczbach masowych  $A_1$  i  $A_2$  i ładunkach  $Z_1$  i  $Z_2$

$$E(A_1 + A_2) = [(Z_1 + Z_2)M_p + (A_1 - Z_1 + A_2 - Z_2)M_n] c^2 - B_1 - B_2 + V_C$$

$$A = A_1 + A_2 \quad Z = Z_1 + Z_2$$

$$\mathcal{B} = E(A_1 + A_2) - E(A) = -B_1 - B_2 + V_C + B_A$$

$$V_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_c} \quad R_c = [0.5 + 1.36(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})] \text{ fm}$$



(energy released)  
energia łączenia

Jeśli  $\mathcal{B} > 0$  jądro  $A$  jest **stabilne jądrowo**

Gdy  $\mathcal{B} < 0$  jądro  $A$  **rozpada się** na fragmenty  $A_1$  i  $A_2$



na gruncie modelu kroplowego

$$- B_i(A,Z) = \varepsilon_s(A,Z) + \varepsilon_V(A,Z) + \varepsilon_C(A,Z)$$

$$\varepsilon_s = \left[ 1 - k \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 \right] a_s A^{2/3}$$

$$a_s = 18.56 \text{ MeV}$$

$$\varepsilon_V = - \left[ 1 - k \left( \frac{N-Z}{A} \right)^2 \right] a_V A$$

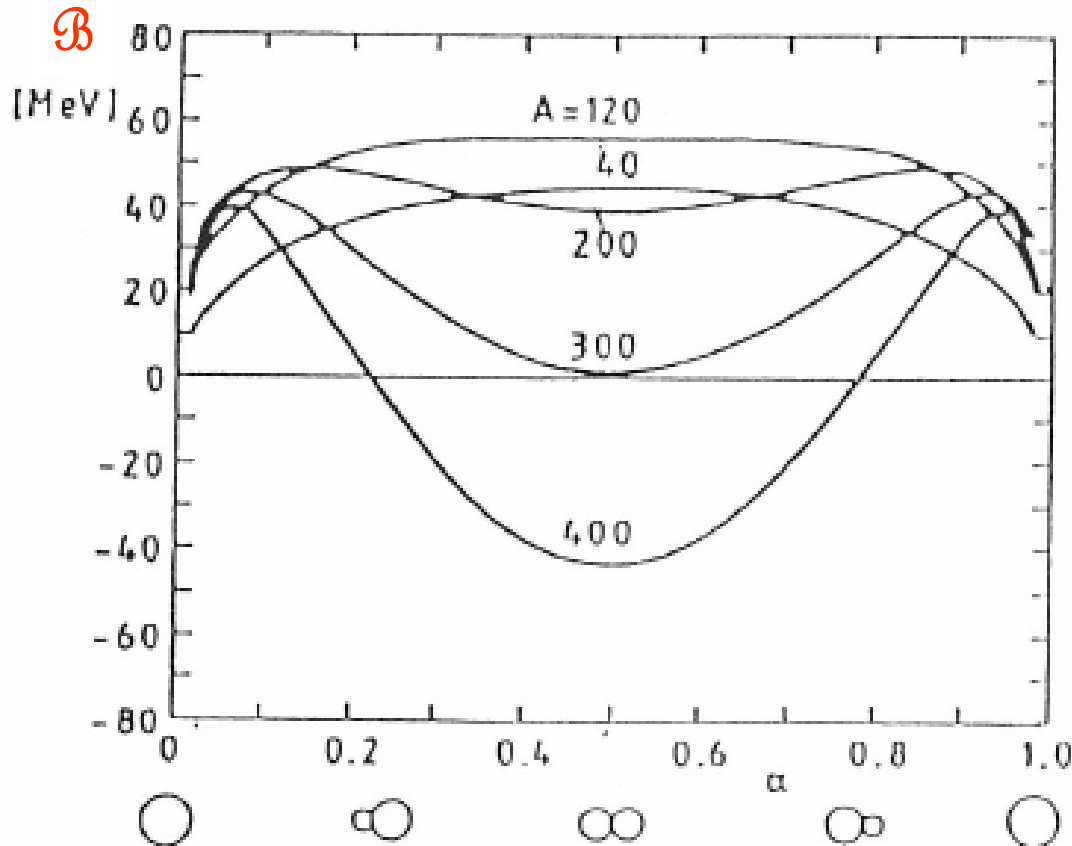
$$\varepsilon_C = \frac{3e^2 Z^2}{5r_0 A^{1/3}} \left( 1 - \frac{5\pi^2 a^2}{6r_0 A^{1/3}} \right)$$

$$k = 1.79$$

$$a_V = 15.677$$

$$r_0 = 1.205 \text{ fm}$$

$$a = 0.546 \text{ fm}$$



Dla:

$A < 120$  faworyzowane są rozpady, w których jeden z fragmentów ma małą masę – **fusion evaporation**

$A > 120$  występują dwa procesy **fusion evaporation** i **fusion-fission ff**

$200 < A < 300$  energetycznie preferowane **symetryczne rozpady ff**

$A > 300$   $\mathcal{B} < 0$  jądro jest **niestabilne**

## Wpływ deformacji i spinu na rozpad jądra

(S. Cohen, F. Plasil and W.J. Świątecki, Annals of Physics 82 (1974) 557)

Rozważania prowadzimy dla **deformującej się nieściśliwej cieczy, naładowanej jednorodnie** (zamiast ładunku – oddziaływania grawitacyjne) **i rotującej jak ciało sztywne.**

Kształt równowagi otrzymujemy poprzez minimalizację efektywnej energii potencjalnej układu, względem wszystkich możliwych stopni swobody układu

$$E = E_s + E_v + E_c + E_R$$

$E_s$  – energia powierzchniowa zależna od kształtu i napięcia powierzchniowego kropli cieczy

$E_v$  – energia objętościowa = const

$E_c$  – energia kulombowska (lub grawitacyjna) – funkcja deformacji

$E_R$  – energia rotacji – funkcja spinu i deformacji

$$E_R = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I(\delta)}$$

$I$  – moment bezwładności jądra,  $\delta$  - parametr deformacji

Dla konfiguracji sferycznej oznaczamy

$$E^0, E_s^0, E_C^0, E_R^0$$

$$x = \frac{E_C^0}{2E_s^0}$$

$$R_0 = r_0 A^{1/3} \quad r_0 = 1.205 \text{ fm}$$

$$E_s^0 = 4\pi R_0^2 \gamma \quad E_C^0 = \frac{3Z^2}{5R_0}$$

$$E_R^0 = \frac{J^2}{2I_0} = \frac{J^2}{\frac{4}{5}MR_0^2}$$

$$y = \frac{E_R^0}{E_s^0}$$

(W.D. Meyers and W.J. Swiatecki, Arkiv of Physics 36 (1967) 343)

$\gamma$ - współczynnik napięcia powierzchniowego materii jądrowej  $\gamma = 0.95 \text{ MeV fm}^{-2}$

$$x \approx \frac{1}{50} \frac{Z^2}{A}$$

parametr rozszczepialności (fissility parameter)

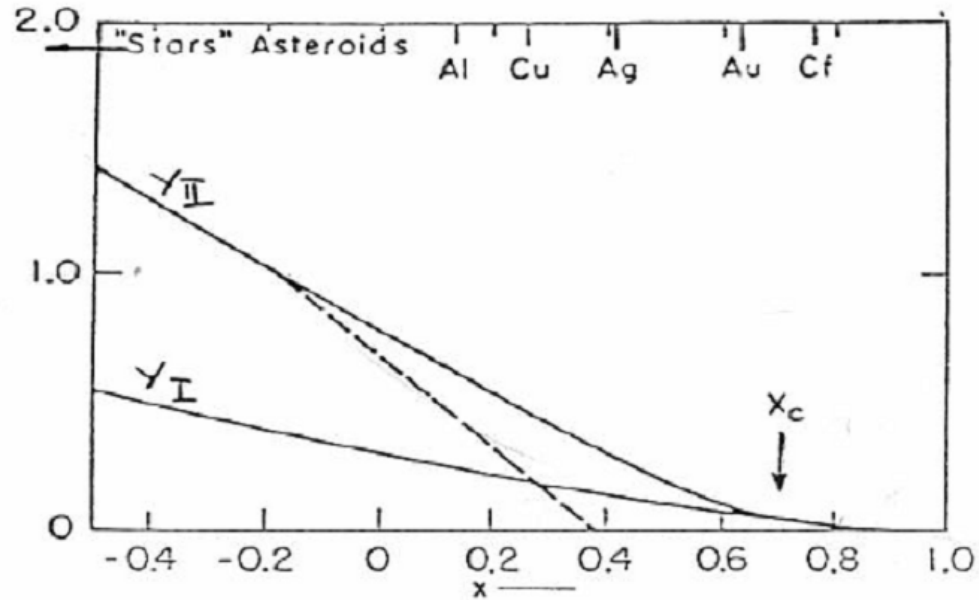
$$y \approx 2 \frac{J^2}{A^{7/3}}$$

Poszukujemy najbardziej stabilnych konfiguracji układu w funkcji parametrów x i y

$Y_{II}$  - elipsoida niestabilna

$Y_I$  - pseudosferoida niestabilna

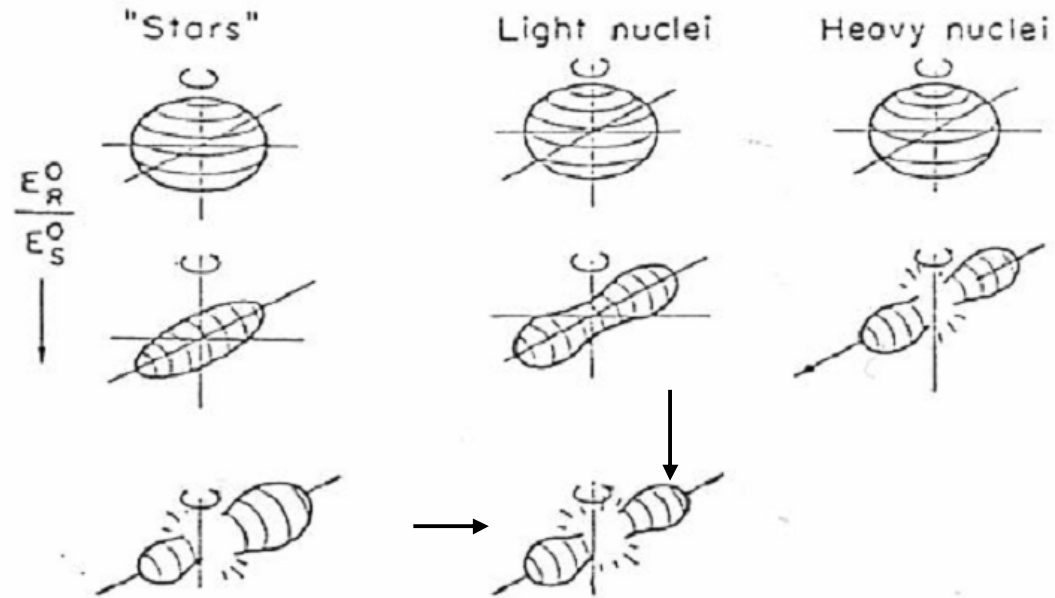
$$y' = \frac{E_{R0}}{E_{S0}}$$



splaszczona pseudosferoida

elipsoida (3 różne osie)

rozerwanie



$x > 0.81$

Fig. 1. Illustration of equilibrium shapes of a rotating

## Energia deformacji

$$E_{def}(J) = E(\delta, J) - E^0(J) = E_s(\delta) + E_c(\delta) + E_{rot}(\delta, J) - E_s^0 - E_c^0 - E_{rot}^0(J)$$

Dla jąder zdeformowanych

$$R = R_0 \left( 1 + \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu} \right)$$

$a_{\lambda\mu}$  - parametr deformacji

$Y_{\lambda\mu}$  - funkcja kulista

dla deformacji osiowo symetrycznej  $\mu=0$ ,  $Y_{\lambda\mu} \rightarrow P_\lambda(\cos\theta)$   
 $\lambda = 2$  deformacja kwadropolowa

$$B_f = \max(E_{def}) - \min(E_{def})$$

Dla  $J=0$

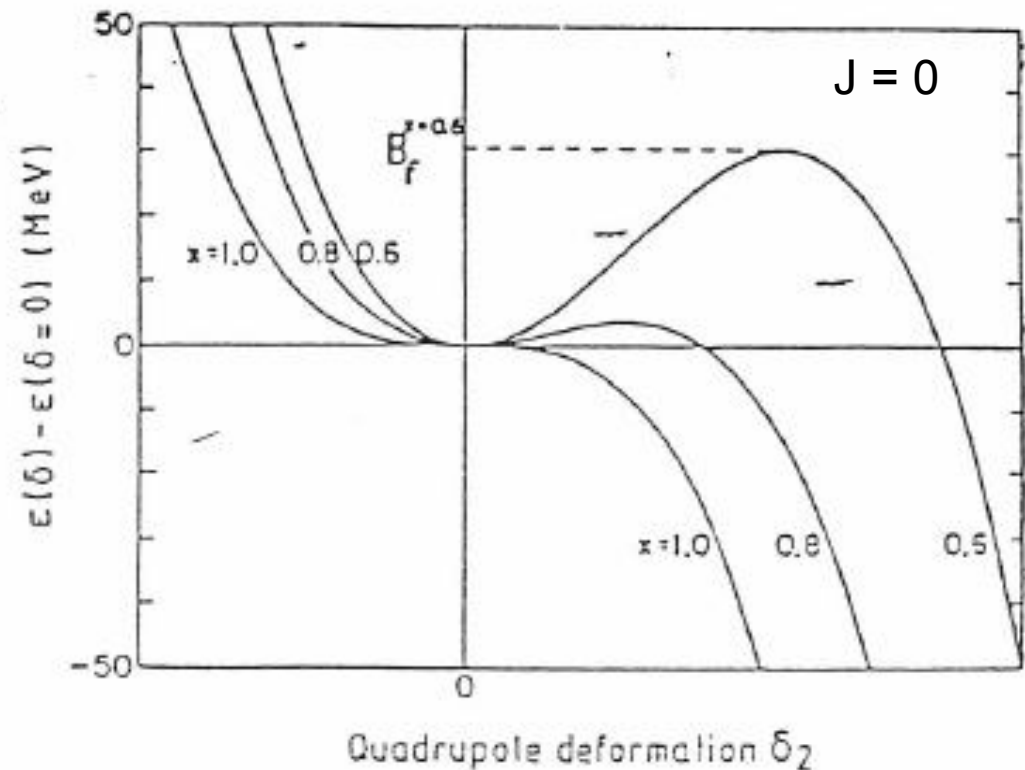
$$B_f(J=0) = \max(E_{def}(\delta))$$

$$\min(E_{def}(\delta)) = 0$$

Dla  $J \neq 0$

$$B_f(J \neq 0) \approx \max(E_{def}(\delta, J))$$

$$\delta_{max} = \text{def. dla } \max(E_{def}(\delta, J))$$



$$B_f(J) \approx E(\delta_{\max}, J) - E^0(J) = E_s(\delta_{\max}) + E_C(\delta_{\max}) + E_{rot}(\delta_{\max}, J) - E_s^0 - E_C^0 - E_{rot}^0(J)$$

$$B_f(J) = B_f(0) + E_{rot}(\delta_{\max}, J) - E_{rot}^0(J)$$

$$E_{rot}^0(J) = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{4/5 MR^2} > E_{rot}(\delta_{\max}, J) = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2 I(\delta_{\max})}$$

bo, moment bezwładności  $I(\delta_{\max}) > 2/5 MR^2$ .

$B_f(J) < B_f(J=0)$  maleje ze wzrostem  $J$

Wartość  $J$  dla której  $B_f = 0$  oznaczamy  $J_{crit}$ .

Dla  $J > J_{crit}$  jądro jest **niestabilne** i ulega natychmiastowemu rozpadowi na dwa fragmenty.



**Niemożliwe** jest utworzenie jądra złożonego o spinie wyższym niż  $J_{crit}$ .

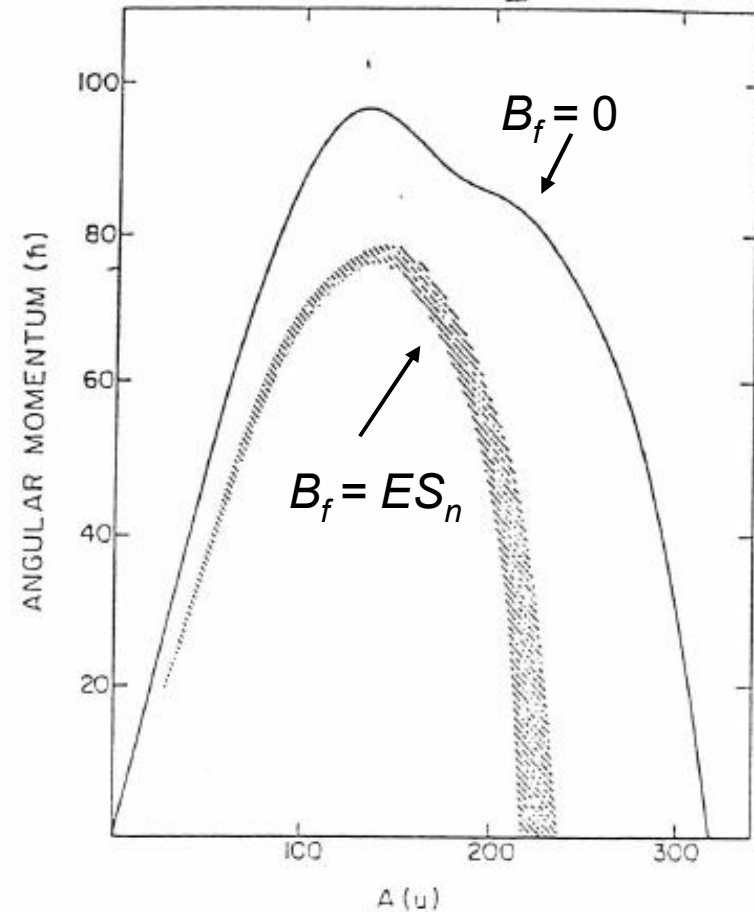
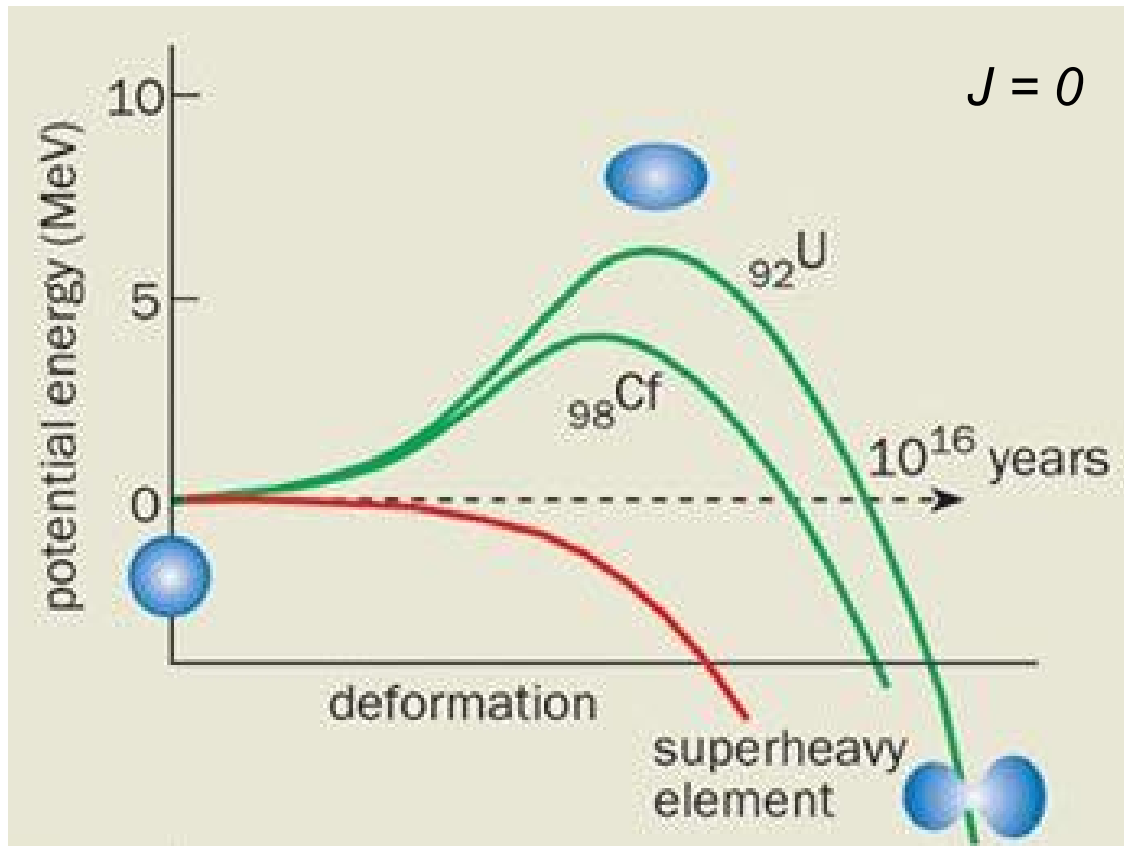


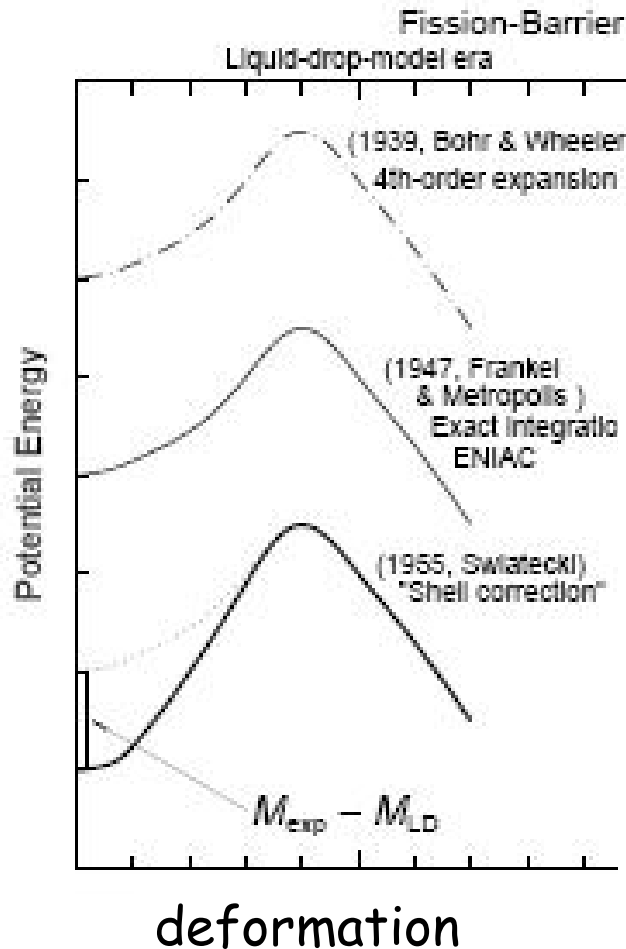
Fig. 7.18. Liquid-drop model prediction of the angular momentum at which the fission barrier of beta-stable nuclei with mass number  $A$  vanishes (solid curve). The hatched area indicates the angular momentum, at which the fission barrier is equal to the neutron separation energy (From Pl 7.4b)

## Przewidywania modelu kroplowego

- jądra o  $x \approx 1$  nie mogą istnieć
- najbardziej stabilne jądra  $A \approx 100 - 180$
- maksymalna wartość spinu, którą można wnieść do jądra  $J \approx 100$



# Wpływ efektów powłokowych na kształt bariery na rozszczepienie



Model Strutińskiego (V. Strutinsky Nucl. Phys. A95 (1967) 420)

Włączenie **poprawek powłokowych** do modelu kroplowego

$$E_{tot}(Z, N, def) = E_{LDM}(Z, N, def) + \delta E_p(Z, def) + \delta E_n(N, def)$$

$$\delta E_q(N_q, def) = \sum_{q=1}^{N_q} \varepsilon_i^q(def) - \left\langle \sum_{q=1}^{N_q} \varepsilon_i^q(def) \right\rangle$$



We współczesnych modelach makroskopowo-mikroskopowych obliczenia prowadzone są w wielowymiarowej przestrzeni deformacji.

$$E_{pot}(Z,N,shape) = E_{mac}(Z,N,shape) + E_{shell}(Z,N,shape) + E_{pairing}(Z,N,shape)$$

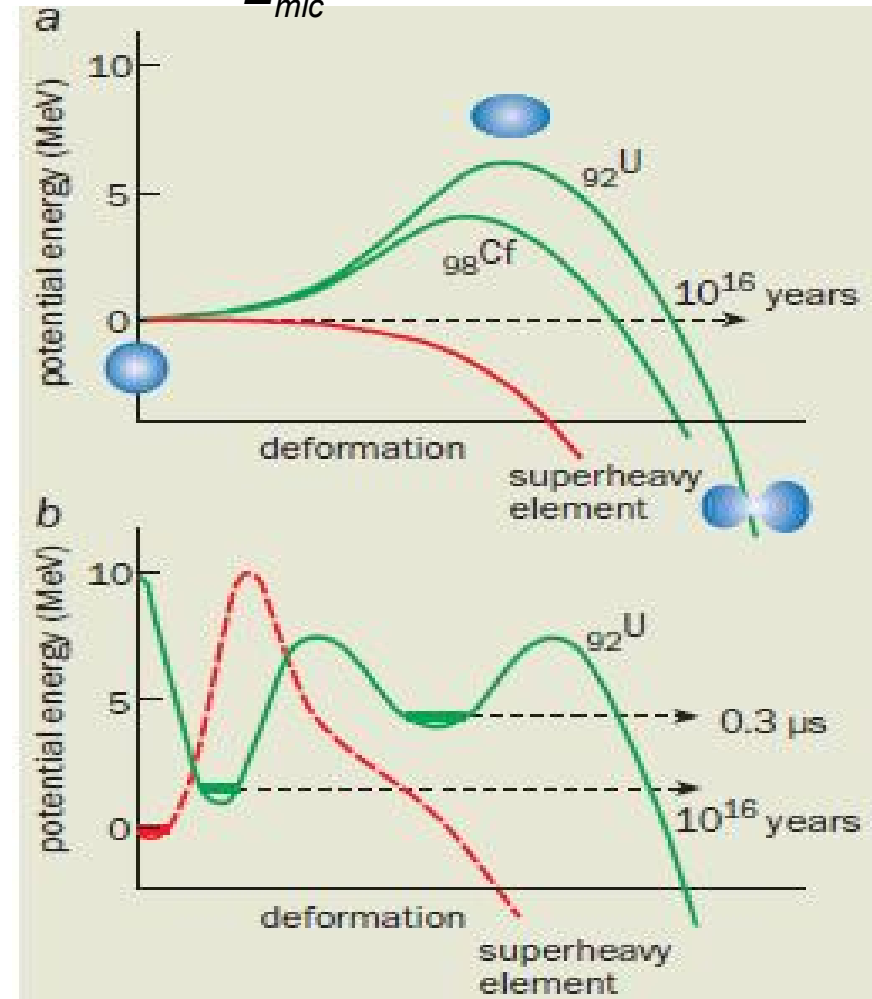
$E_{mac}(shape)$  – LDM i potencjał jednocząstkowy Yukawa+exponential  
(H.J.Krappe, J.R.Nix and A.J.Sierk  
PRC 20 (1979) 992)

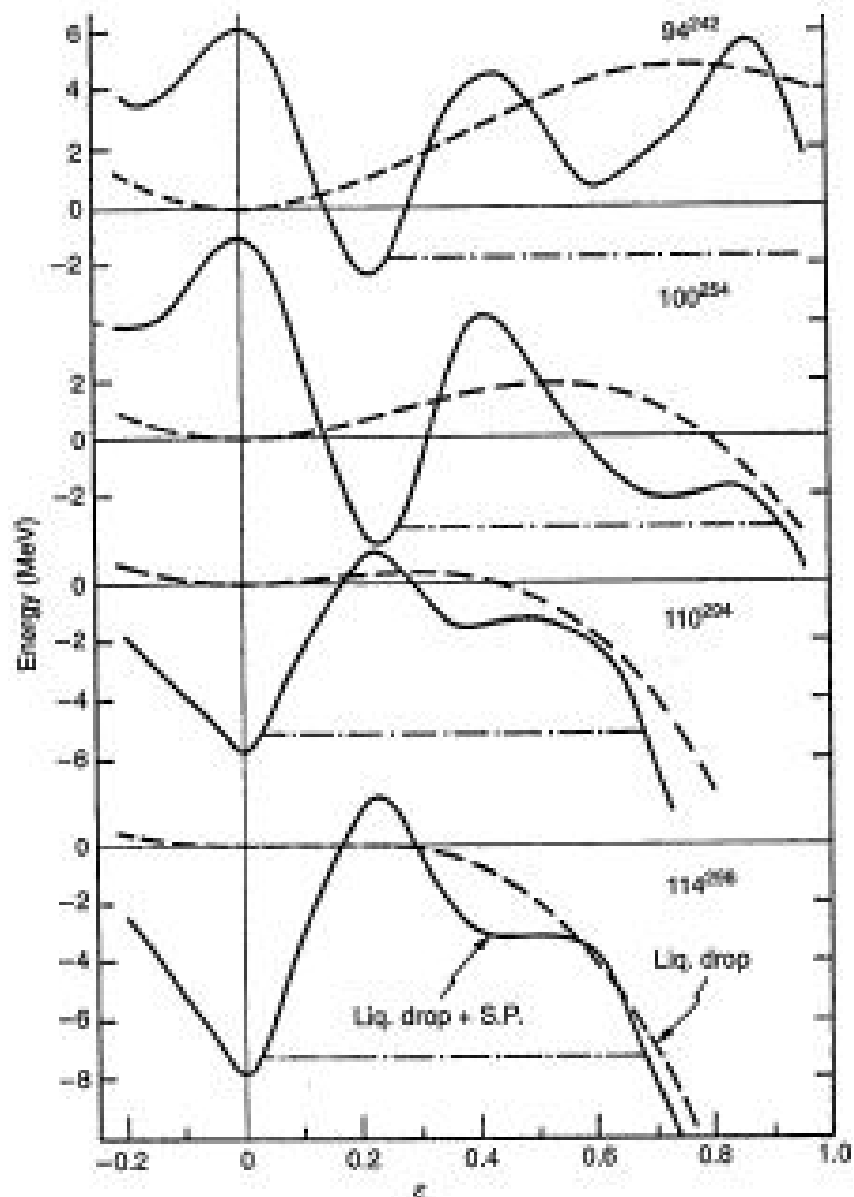
$E_{shell}(shape) =$

$$\sum_{q=1}^{N_q} \varepsilon_i^q(shape) - \left\langle \sum_{q=1}^{N_q} \varepsilon_i^q(shape) \right\rangle$$

$E_{pairing}(shape)$  – uwzględnia korelacje związane z „pairing”

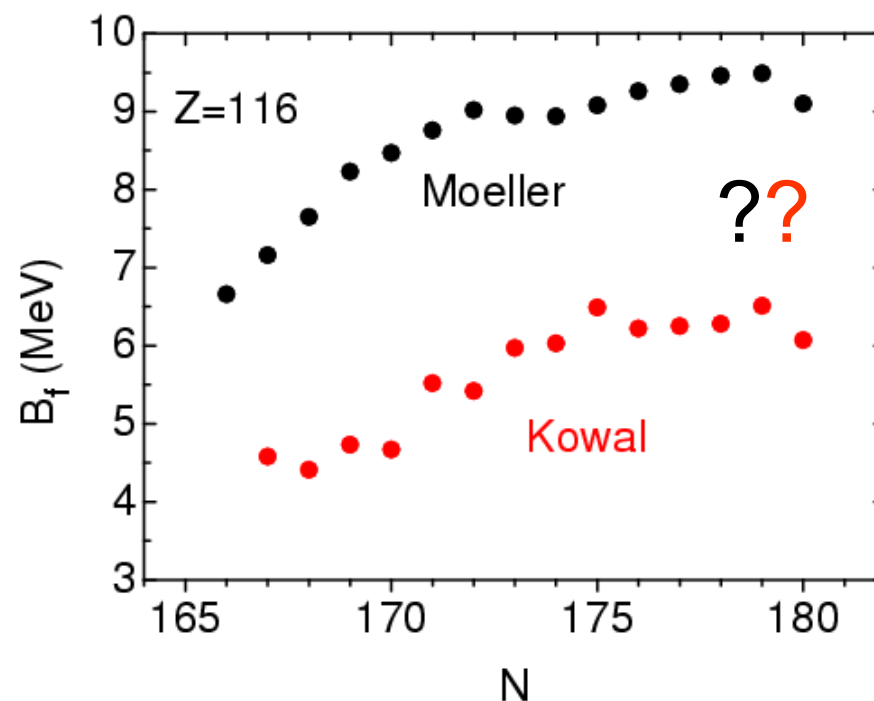
From Yu. Oganessian,  
Physics World (2004), ISSN: 0953-8585





$$B_f = E_{pot}(Z, N, sd) - E_{pot}(Z, N, gs) !$$

Porównanie wyników obliczeń w ramach modelu makro-mikro

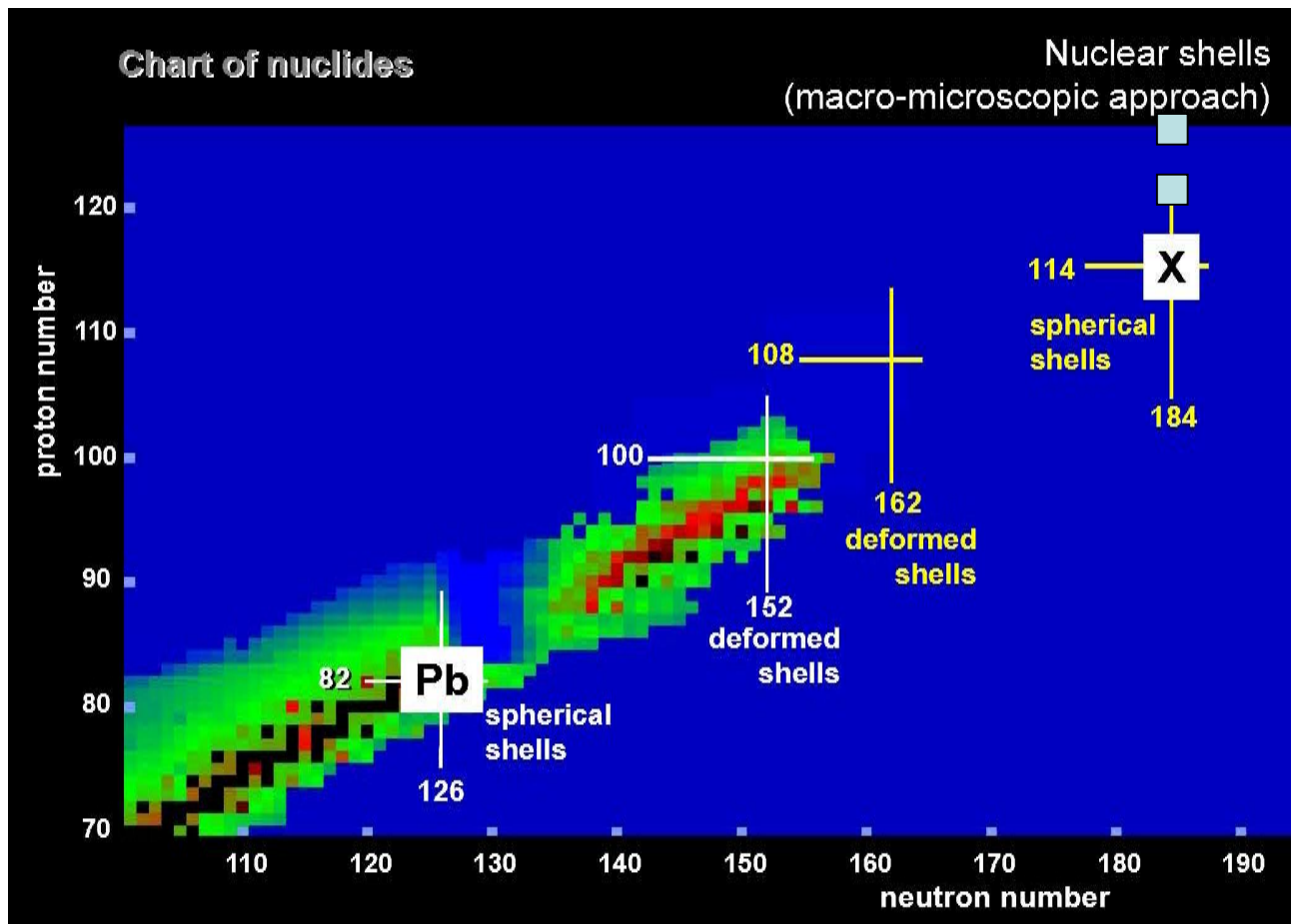


P. Möller et al., PRC 79, 064304 (2009)

M. Kowal, P. Jachimowicz, A. Sobiczewski,  
PRC 82, 014303 (2010)

# Liczby magiczne

1. Modele makro-mikroskopowe  $Z=114$ ,  $N=184$ . (Najcięższy znany (114,175))



2. Modele samouzgodnione uśrednionego pola bazujące na różnych efektywnych oddziaływaniach  $Z=120, 126$   $N=184$

$$\begin{aligned}
M_{\text{macr}}(Z, N, \beta_\lambda^0) &= M_{\text{H}}Z + M_{\text{n}}N - a_{\text{v}}(1 - \kappa_{\text{v}}I^2)A + a_{\text{s}}(1 - \kappa_{\text{s}}I^2)A^{2/3}B_{\text{S}}(\{\beta_\lambda^0\}) \\
&\quad + a_0A^0 + c_1Z^2A^{-1/3}B_{\text{C}}(\{\beta_\lambda^0\}) - c_4Z^{4/3}A^{-1/3} \\
&\quad + f(k_{\text{F}}r_{\text{p}})Z^2A^{-1} - c_{\text{a}}(N - Z) - a_{\text{el}}Z^{2.39},
\end{aligned} \tag{2}$$

where  $M_{\text{H}}$  is mass of the hydrogen atom,  $M_{\text{n}}$  is mass of neutron,  $I = (N - Z)/A$  is the relative neutron excess,  $A = Z + N$  is the mass number of a nucleus. The functions  $B_{\text{S}}(\beta_\lambda)$  and  $B_{\text{C}}(\beta_\lambda)$  describe the dependence of the surface and Coulomb energies, respectively, on deformations  $\beta_\lambda$ , and  $\beta_\lambda^0$  are the values of these deformations at equilibrium. We adopted these functions in the form given by the Yukawa-plus-exponential model formulated by Krappe and Nix [41]. They read [27, 43]:

$$B_{\text{S}} = \frac{A^{-2/3}}{8\pi^2 r_0^2 a^4} \int \int_V \left(2 - \frac{r_{12}}{a}\right) \frac{e^{-r_{12}/a}}{r_{12}/a} d^3r_1 d^3r_2, \tag{3}$$

$$B_{\text{C}} = \frac{15}{32\pi^2} \frac{A^{-5/3}}{r_0^5} \int \int_V \frac{1}{r_{12}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_{12}}{a_{\text{den}}}\right) e^{-r_{12}/a_{\text{den}}}\right] d^3r_1 d^3r_2, \tag{4}$$

where  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  with  $\vec{r}_1$  and  $\vec{r}_2$  describing the positions of two interacting volume elements,  $a$  is the range of the Yukawa interaction on which the model is based,  $a_{\text{den}}$  is the range of the Yukawa function used to generate nuclear charge distribution. The functions are normalized in such a way that they are equal 1 for a spherical nucleus in the limit case of  $a=0$  (for  $B_{\text{S}}$ ) and  $a_{\text{den}}=0$  (for  $B_{\text{C}}$ ), corresponding to the traditional liquid-drop model with a sharp surface. The integrations are over the volume of a nucleus. After turning them into surface integrals,  $B_{\text{S}}$  and  $B_{\text{C}}$  were calculated by using a four-fold (or three-fold, for axial symmetry) 64-point Gaussian quadrature.

The quantities  $c_1$  and  $c_4$  appearing in the Coulomb energy and the Coulomb exchange correction, respectively, are

$$c_1 = \frac{3 e^2}{5 r_0}, \quad c_4 = \frac{5}{4} \left( \frac{3}{2\pi} \right)^{2/3} c_1, \quad (5)$$

where  $e$  is the elementary electric charge and  $r_0$  is the nuclear-radius parameter. The quantity  $f(k_F r_p)$  appearing in the proton form-factor correction to the Coulomb energy in Eq. (2) has the form

$$f(k_F r_p) = -\frac{1}{8} \frac{e^2 r_p^2}{r_0^3} \left[ \frac{145}{48} - \frac{327}{2880} (k_F r_p)^2 + \frac{1527}{1209600} (k_F r_p)^4 \right], \quad (6)$$

where the Fermi wave number is

$$k_F = \left( \frac{9\pi Z}{4A} \right)^{1/3} r_0^{-1}, \quad (7)$$

and  $r_p$  is the proton root-mean-square radius. The last term in Eq. (2) describes the binding energy of electrons and  $a_v$ ,  $\kappa_v$ ,  $a_s$ ,  $\kappa_s$ ,  $a_0$ ,  $c_a$  are adjustable parameters. Thus, only two of these parameters ( $a_s$  and  $\kappa_s$ ) appear at the term, which depends on deformation. The four remaining parameters stand at the terms independent of the shape of a nucleus.

The macroscopic part of mass, Eq. (2), is used the same as in [42], except that three of its adjustable parameters:  $a_v$ ,  $\kappa_v$  and  $a_0$  were fitted to experimental masses of even-even heaviest nuclei with  $Z \geq 84$ . The result was

$$a_v = 16.0643, \quad \kappa_v = 1.9261, \quad a_0 = 17.926. \quad (8)$$

Following the authors of [42], we omit here the two terms considered in [43]: charge-asymmetry term  $c_a(N - Z)$  and Wigner term (characterized by a coefficient  $W$ ), as they do not significantly change the quality of the description of

masses of heaviest nuclei. The values of other parameters are adopted after [43]:

$$a_s = 21.13 \text{ MeV}, \quad \kappa_s = 2.30, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} a &= 0.68 \text{ fm}, & a_{\text{den}} &= 0.70 \text{ fm}, & r_0 &= 1.16 \text{ fm}, \\ r_p &= 0.80 \text{ fm}, & a_{\text{el}} &= 1.433 \cdot 10^{-5} \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (10)$$

## 2.2. Microscopic energy

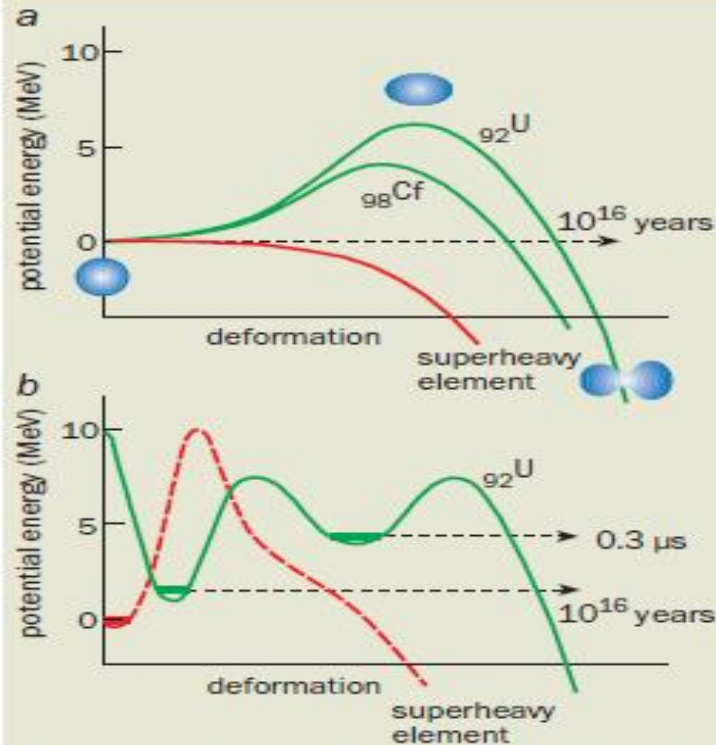
The Strutinski shell correction [44, 45], based on the deformed Woods-Saxon single-particle potential, is taken for the microscopic part:

$$\begin{aligned} E_{\text{mic}}(\text{def}, Z, N) &= E_{\text{corr}}^{\text{sh}}(\text{def}, Z, N) \\ &+ E_{\text{corr}}^{\text{pair}}(\text{def}, Z, N), \end{aligned} \quad (11)$$

where  $E_{\text{corr}}^{\text{sh}}$  and  $E_{\text{corr}}^{\text{pair}}$  are the shell and pairing corrections, respectively.

### 2.2.1. Woods-Saxon potential

## 1 Nuclear models



There are two models that attempt to explain the stability of nuclei. (a) In the liquid-drop model, nuclear matter is treated as if it does not have any structure, and the deformation of nuclei depends on whether the repulsive force of the protons can overcome the surface tension of the "drop". In this model, heavier nuclei are more likely to split into two via spontaneous fission than lighter nuclei. (b) The microscopic nuclear theory, on the other hand, describes nuclei in terms of proton and neutron shells, which can allow certain heavy nuclei to live much longer. The difference between the two models is particularly clear for the heavy element 108 (red curves). In the liquid-drop model the absence of a fission barrier means that 108 has a half-life of about  $10^{-19}$  s, whereas in the microscopic model, shell effects increase the height of the fission barrier such that a neutron-rich isotope of element 108 (i.e. with  $N = 184$ ) lives for at least  $10^{15}$  s.

From Yu.  
Oganessian,  
Physics World  
(2004), ISSN:  
0953-8585.

# Model statystyczny jądra złożonego

Jeśli reakcja  $X(a,b)Y$  zachodzi poprzez etap pośredni ( $CN^*$ ), to proces tworzenia rozpadu  $CN^*$  są niezależne - hipoteza niezależności Niels Bohr ( Nature 137 (1936) 344)



- jeśli jądro złożone żyje dostatecznie długo osiągamy stan równowagi termodynamicznej.

$$E_{CN^*} = E_{CM} + Q_{fus}$$

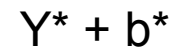
$$Q_{fus} = (M_X + M_a) c^2 - M_{CN} c^2 -$$

energia potrzebna do utworzenia CN w stanie podstawowym

Kanał

a

b



b lekka cząstka (n,p,d, t....)

$$E_b^* = 0.$$

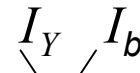
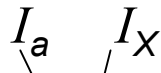
energia

$$\varepsilon_a = \frac{\hbar^2 k_a^2}{2\mu_a}$$

$$E_{CN^*}$$

$$\varepsilon_b = \frac{\hbar^2 k_b^2}{2\mu_b}$$

spiny



spin kanału



Moment pędu względny



$$|l_a - S_a| \leq J_{CN} \leq |l_a + S_a|$$

$$S_a \ll l_a \quad J_{CN} \approx l_a$$



$$\sigma^J(a,b) = \sigma_{CN}^J(a) G_{CN}^J(b)$$

Przekroju czynnemu na utworzenie jądra złożonego w stanie o spinie  $J$

prawdopodobieństwo rozpadu jądra złożonego ze stanu o spinie  $J$

Różnymi drogami tworzono to samo jądro złożone  $^{64}\text{Zn}^*$  (przy tej samej energii wzbudzenia)

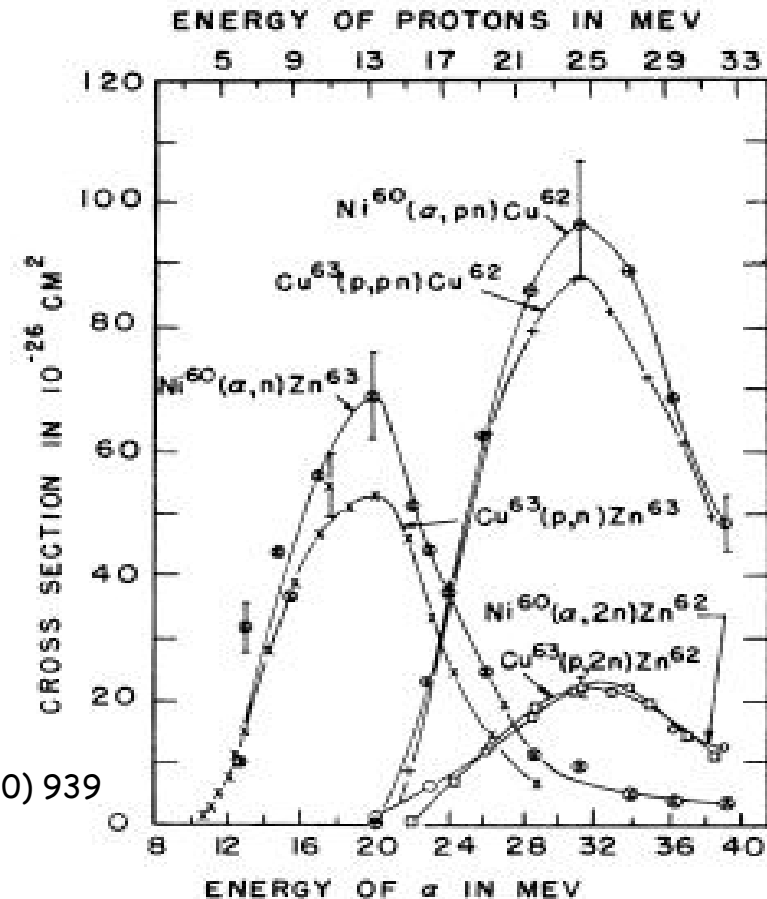


$$E^* = E_{CM} + Q_{fus}$$

$$Q_{fus} = (M_x + M_a - M_{CN})c^2$$

$$\frac{\sigma(\alpha, i)}{\sigma(p, i)} = \frac{\sigma_{CN}(\alpha)}{\sigma_{CN}(p)}$$

$i$  - kanał rozpadu



S.N. Ghoshal,  
Phys. Rev. 80 (1950) 939

FIG. 1. Experimental cross sections for  $(p, n)$ ,  $(p, 2n)$ ,  $(p, pn)$  reactions on  $\text{Cu}^{63}$  and for  $(\alpha, n)$ ,  $(\alpha, 2n)$ ,  $(\alpha, pn)$  reactions on  $\text{Ni}^{60}$  plotted against  $\epsilon_p$  and  $\epsilon_\alpha$  respectively. The scale of  $\epsilon_p$  has been shifted by 7 Mev with respect to the scale of  $\epsilon_\alpha$ .

$$\sigma^J(a,b) = \sigma_{CN}^J(a) G_{CN}^J(b) \quad G_{CN}^J(b) = \frac{\Gamma_b^J}{\sum_{b'} \Gamma_{b'}^J} = \frac{\Gamma_b^J}{\Gamma^J} \quad \sum_b G_{CN}^J(b) = 1$$

$\Gamma = \hbar/\tau$  - miara prawdopodobieństwa rozpadu

$\Gamma = 1\text{eV}$ ,  $\tau = 6.6 \times 10^{-16}\text{ s}$  (po czasie  $\tau$  intensywność należy o czynnik  $1/e$ )

Jak wyznaczyć  $G_{CN}^J(b)$  ?

Korzystając z formalnej teorii reakcji jądrowych można pokazać, że całkowity hamiltonian opisujący kanał wejściowy lub wyjściowy jest niezmienniczy względem odwrócenia czasu.

Zasada równowagi szczegółowej

$$k_a^2 \sigma(a,b) = k_b^2 \sigma(b,a)$$

$$k_a^2 \sigma_{CN}(a) \frac{\Gamma_b}{\Gamma} = k_b^2 \sigma_{CN}(b) \frac{\Gamma_a}{\Gamma}$$

$$k_a^2 \frac{\sigma_{CN}(a)}{\Gamma_a} = k_b^2 \frac{\sigma_{CN}(b)}{\Gamma_b}$$

$$k_a^2 \frac{\sigma_{CN}(a)}{\Gamma_a} = F(a)$$

$$\Gamma_b = \frac{k_b^2 \sigma_{CN}(b)}{F(a)}$$

$$\Gamma = \sum_{b'} \Gamma_{b'} = \frac{\sum_{b'} k_{b'}^2 \sigma_{CN}(b')}{F(a)}$$

$$G_{CN}^J(b) = \frac{\sigma_{CN}^J(b) k_b^2}{\sum_{b'} \sigma_{CN}^J(b') k_{b'}^2}$$

$$\sigma_{CN}^J(a,b) = \frac{\sigma_{CN}^J(a)\sigma_{CN}^J(b)k_b^2}{\sum_c \sigma_{CN}^J(c)k_c^2}$$

$$\sigma_{CN}^J(i) = \pi \hat{\lambda}^2 (2J+1) T_{liSi}^J$$

$$\sigma_{CN}^J(a,b) = \frac{\pi \hat{\lambda}_a^2 (2J+1) T_{laSa}^J \frac{\pi}{k_b^2} k_b^2 T_{lbSb}^J (2J+1)}{\sum_c k_c^2 \frac{\pi}{k_c^2} T_{lcSc}^J (2J+1)}$$

Formuła  
Hausera-Feshbacha

$$\sigma_{CN}^J(a,b) = \frac{\pi \hat{\lambda}_a^2 (2J+1) T_{laSa}^J T_{lbSb}^J}{\sum_c T_{lcSc}^J}$$

Przekrój czynny dla przejścia ze stanu początkowego a -  $\{\varepsilon_a, I_x, I_a\}$  do stanu końcowego b -  $\{\varepsilon_b, I_y, I_b\}$  poprzez stan pośredni jądra złożonego o spinie J

$$\sigma_{a \rightarrow b} = \frac{\pi \lambda_a^2}{(2I_x + 1)(2I_a + 1)} \sum_{J=0}^{\infty} \left[ \frac{\sum_{S_a=|I_x-I_a|}^{I_x+I_a} \sum_{\ell_a=|J-S_a|}^{J+S_a} (2J+1) T_{\ell_a, S_a}^J(a, CN) \sum_{S_b=|I_y-I_b|}^{I_y+I_b} \sum_{\ell_b=|J-S_b|}^{J+S_b} T_{\ell_b, S_b}^J(CN, b)}{\sum_{c, I_z, I_c} \sum_{S_c=|I_z-I_c|}^{I_z+I_c} \sum_{\ell_c=|J-S_c|}^{J+S_c} T_{\ell_c, S_c}^J(CN, c)} \right]$$

Do wyznaczenia przekroju czynnego potrzebne są :

$T_{Ia, Sa}^J$  - współczynniki transmisji na utworzenie jądra złożonego,

$T_{Ib, Sb}^J$ ,  $T_{Ic, Sc}^J \dots$  - (wszystkie możliwe kanały rozpadu) współczynniki transmisji na utworzenie jądra złożonego w procesie odwrotnym t.j. w oddziaływaniu cząstki  $i$  o energii  $\varepsilon_i$  z jądrem końcowym  $Y^*$  będącym w stanie wzbudzonym o energii  $E_i^*$ . Współczynniki transmisji wyznacza się dla jądra w stanie podstawowym (ze względu na to, że potencjał jądrowy jest słabo zależny od energii ).

Dwa obszary stosowalności modelu statystycznego

1. Obszar rezonansowy  $\Gamma/D \ll 1$
2. Obszar kontinuum  $\Gamma/D \gg 1$  (duża energia wzbudzenia jądra końcowego)

Wprowadzamy pojęcie gęstości stanów  $\rho(E^*, J)$  – ilość stanów na jednostkę energii

$$\sigma^J(a,b) = \sigma_{CN}^J(a) G_{CN}^J(b) \quad G_{CN}^J(b) = \frac{\Gamma_b^J}{\sum_{b'} \Gamma_{b'}^J} = \frac{\Gamma_b^J}{\Gamma^J} \quad \sum_b G_{CN}^J(b) = 1$$

$\Gamma = \hbar/\tau$  - miara prawdopodobieństwa rozpadu

$\Gamma = 1\text{eV}$ ,  $\tau = 6.6 \times 10^{-16}\text{ s}$  (po czasie  $\tau$  intensywność maleje o czynnik  $1/e$ )

Całkowity hamiltonian względem odwrócenia czasu

$$k_a^2 \sigma(a,b) = k_b^2 \sigma(b,a)$$

Zasada równowagi szczegółowej

$$k_a^2 \sigma_{CN}(a) \frac{\Gamma_b}{\Gamma} = k_b^2 \sigma_{CN}(b) \frac{\Gamma_a}{\Gamma}$$

$$k_a^2 \frac{\sigma_{CN}(a)}{\Gamma_a} = k_b^2 \frac{\sigma_{CN}(b)}{\Gamma_b}$$

$$k_a^2 \frac{\sigma_{CN}(a)}{\Gamma_a} = F(a) \quad \Gamma_b = \frac{k_b^2 \sigma_{CN}(b)}{F(a)}$$

$$\Gamma = \sum_{b'} \Gamma_{b'} = \frac{\sum_{b'} k_{b'}^2 \sigma_{CN}(b')}{F(a)}$$

$$G_{CN}^J(b) = \frac{\sigma_{CN}^J(b) k_b^2}{\sum_{b'} \sigma_{CN}^J(b') k_{b'}^2}$$

# Gęstość poziomów jądrowych

Duża  $E^*$  jądra. Szerokość stanu  $\Gamma \gg D$  (odległość między stanami)

1. Silna zależność od energii wzbudzenia jądra.
2. Zależność od spinu jądra
3. Zależność od efektów dwójkowania (pairing) nukleonów w jądrze.
4. Silna zależność od efektów powłokowych.

Gęstość poziomów jądrowych wyznacza się stosując metody fizyki statystycznej i pojęcia zapożyczone z termodynamiki.

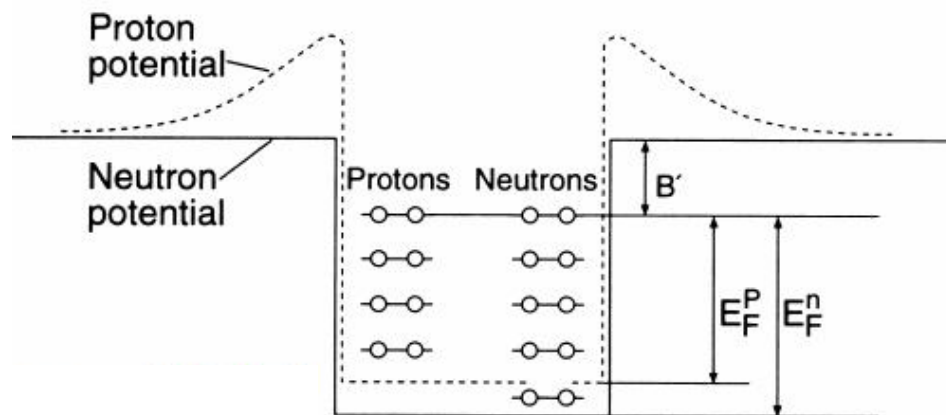
- Zależność od energii wzbudzenia jądra.

## Model gazu Fermiego

Jądro traktujemy jako układ **nieoddziałujących** fermionów (idealny gaz) znajdujących się w objętości  $V$ .

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad R = r_0 A^{1/3} \text{ fm}$$

Fermiony znajdują się w prostokątnej studni potencjalnej na poziomach jednocząstkowych w stanie o określonej energii  $\varepsilon_k$  i rzucie spinu  $m_k$ .



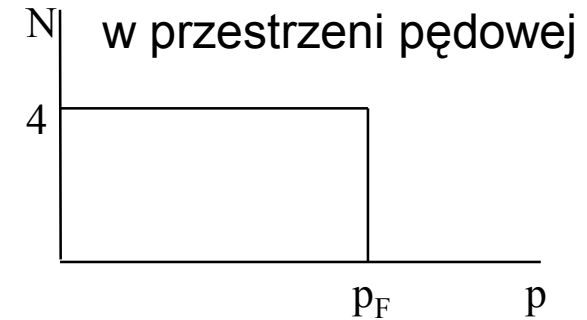
$B$  - energia wiązania,  
 $E_F$  - energia Fermiego.

W stanie o określonej energii  $\varepsilon_k$  maksymalnie mogą się znajdować 4 fermiony – 2 neutrony i 2 protony.

$n_k$  - liczba znajdujących się na danym poziomie fermionów.

W stanie podstawowym jądra ( $T = 0$ ) wszystkie stany jednocząstkowe ( $\varepsilon_k, m_k$ ) poniżej poziomu Fermiego są obsadzone (dla  $Z=N=A/2$ ).

$$n_k = \begin{cases} 1 & \text{dla } \varepsilon_k < \varepsilon_F \\ 0 & \text{dla } \varepsilon_k > \varepsilon_F. \end{cases}$$



W elemencie objętości -  $h^3$ , mogą się znaleźć 4 fermiony.

W objętości  $V$  -  $4V/h^3$  fermionów.

Liczba cząstek zawartych w elemencie przestrzeni pędowej  $[p, p+dp]$

$$P(p)dp = 4\pi p^2 dp \cdot 4V/h^3 \quad A = \frac{16\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{16\pi V p_F^3}{3h^3}$$

$\rho_0 = A/V$  gęstość normalna = 0.17 nucl/fm<sup>3</sup>.

$$p_F^3 = \frac{3}{2} \hbar^3 \rho_0 \pi^2$$

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left( \frac{3}{2} \hbar^3 \rho_0 \pi^2 \right)^{2/3} \frac{1}{2m} \approx 39 \text{ MeV}$$

Głębokość studni  $\varepsilon_F + B \approx 47 \text{ MeV}$ .



liczba cząstek zawartych w elemencie przestrzeni energetycznej od  $\varepsilon$  do  $\varepsilon+d\varepsilon$  -

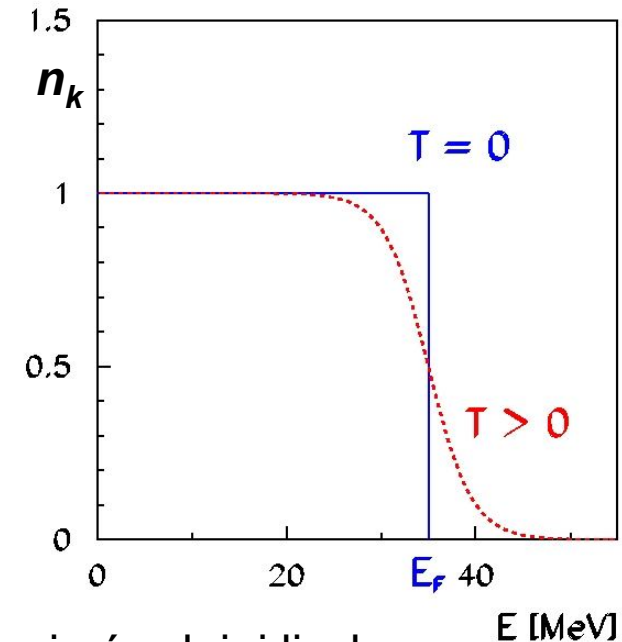
$$P(p)dp = 4\pi p^2 dp \quad 4V/h^3 \quad \rho(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4V}{h^3} 2\pi(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \rho(\varepsilon)d\varepsilon$$

$\rho(\varepsilon)$  - gęstość poziomów jednocząstkowych  $\rho(\varepsilon) = \frac{4V}{h^3} 2\pi(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2}$

$$A = \int_0^{\varepsilon_F} \rho(\varepsilon) n_k(\varepsilon) d\varepsilon \quad E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \rho(\varepsilon) n_k(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\varepsilon_F^{3/2} = \frac{\hbar^3}{(2m)^{3/2}} \left( \frac{3}{2} \rho_0 \pi^2 \right) \quad \rho(\varepsilon) = \frac{3A}{2\varepsilon_F^{3/2}} \varepsilon^{1/2}$$

$$E_0 = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{3A}{2\varepsilon_F^{3/2}} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{3A}{2\varepsilon_F^{3/2}} \frac{2\varepsilon_F^{5/2}}{5} = \frac{3}{5} \varepsilon_F A$$



Dla stanu wzbudzonego jądra  $T > 0$  wprowadzamy pojęcie średniej liczby obsadzeń w stanie  $k$  -  $n_k$ .

$$n_k = \frac{1}{1 + \exp[\beta(\varepsilon_k - \varepsilon_F)]} \quad \beta = \frac{1}{kt} \quad \begin{array}{l} k - \text{stała Boltzmana,} \\ t - \text{temperatura [}^\circ\text{K].} \end{array}$$

$T = kt$  - temperatura w MeV  $(1 \text{ MeV} = 1.16 \cdot 10^{10} \text{ }^\circ\text{K})$

$$A = \int_0^{\infty} \rho(\varepsilon) n_k(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$E = \int_0^{\infty} \varepsilon \rho(\varepsilon) n_k(\varepsilon) d\varepsilon$$

dla małych wartości  $1/\beta$

$$E \approx E_0 + \rho(\varepsilon_F) \frac{\pi^2}{6\beta^2}$$

$$E^* = E - E_0 = \rho(\varepsilon_F) \frac{\pi^2}{6\beta^2}$$

$$E^* = a T^2$$

$$a = \frac{\pi^2}{6} \rho(\varepsilon_F)$$

- parametr gęstości poziomów jądrowych (MeV<sup>-1</sup>)

$$\rho(\varepsilon_F) = \frac{3A}{2\varepsilon_F^{3/2}} \varepsilon_F^{1/2} = \frac{3A}{2\varepsilon_F} \quad a \approx \frac{A}{16} \text{MeV}^{-1}$$

**Empiryczna wartość parametru gęstości** większa o czynnik 2.  
Zależy od temperatury, dla  $T < 3 - 4 \text{ MeV}$   $a \sim A/8$

Gęstość poziomów jądrowych  $(A, E)$ , dla układu o liczbie cząstek  $A$  i energii  $E$ , określona jest przez entropię  $S(A, E)$  :

$$\rho(A, E) = \rho(A, E_0) \exp[ S(A, E)/k ].$$

Zmiana entropii układu  $A$  cząstek przy stałej objętości wynosi

$$dS = \frac{dE}{T} k \quad E = E_0 + E^*; \quad E^* = aT^2$$

$$S = k \int_{E_0}^E \frac{dE}{T} = k \int_0^{E^*} \sqrt{\frac{a}{E^*}} dE^* = 2k\sqrt{aE^*}$$

Wprowadzamy oznaczenie:

$$\rho(A, E) = \rho_A(E^*)$$

$$\rho_A(E^*) = \rho_A(0) \exp(2\sqrt{aE^*})$$

$$\rho(E^*) \propto \exp(2\sqrt{aE^*})$$

wzór Bethego

- Zależność gęstości poziomów jądrowych od spinu.

Na gruncie modelu gazu Fermiego:

$$\rho(E^*, J) \approx \rho(E^*) \frac{(2J + 1) \exp[-J(J + 1)/2\sigma^2]}{2(2\pi)^{1/2} \sigma^3}$$

$\sigma$  - parametr obcięcia spinowego (spin cut off parameter).

Dla stanu o spinie  $J$  energia dostępna dla wzbudzeń jednocząstkowych (energia termiczna) wynosi:

$$E_T^* = E^* - \frac{\hbar^2 J^2}{2I} \quad (I - \text{moment bezwładności jądra}).$$

Gęstość poziomów jądrowych o spinie  $J$  wynosi:

$$\rho(E_T^*, J) \propto \rho\left(E^* - \frac{\hbar^2 J^2}{2I}\right)$$

$$\rho(E^*) \propto \exp(2\sqrt{aE^*}) = \exp\left(\frac{E^*}{T}\right)$$

$$E^* = aT^2$$

$$\rho(E_T^*, J) \propto \rho(E^*) \times \exp\left(-\frac{\hbar^2 J^2}{2IT}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{IT}{\hbar^2}$$

- Efekt dwójkowania „pairing”

Założenie:  $\rho_{e-e}(E^*) = \rho_{o-e}(E^* - \Delta) = \rho_{o-o}(E^* - 2\Delta)$

$\Delta$  – poprawka „pairing” 12.5/A (MeV)

Potwierdzone eksperymentalnie.

Wyznaczanie parametru gęstości poziomów jądrowych

Na gruncie modelu kropkowego

$$a_{LDM} = A(a_v + a_s B_s A^{-1/3} + a_c B_c A^{-2/3})$$

$B_s, B_c$  - parametry opisujące wpływ deformacji jądra ( W.D. Myers and W.J. Świątecki, Ann. Phys. 84 (1974) 186)

- Uwzględnienie efektów powłokowych

(A.V. Ignatyuk et al.,  
Sov. J. Nucl. Phys. 29 (1975) 255)

$$a = a_{LDM} \left[ 1 + \frac{E_{shell}}{U} \left( 1 - \exp\left(-\frac{U}{E_d}\right) \right) \right]$$

$U$  – energia wzbudzenia

$E_{shell}$  – poprawka powłokowa ( $M_{exp} - M_{LDM}$ )

$E_d$  - parametr zanikania efektów powłokowych

Porównanie parametrów  $a$  wyznaczonych z rezonansów neutronowych ( $U \sim 8$  MeV) z obliczonymi  $a_{LDM}$

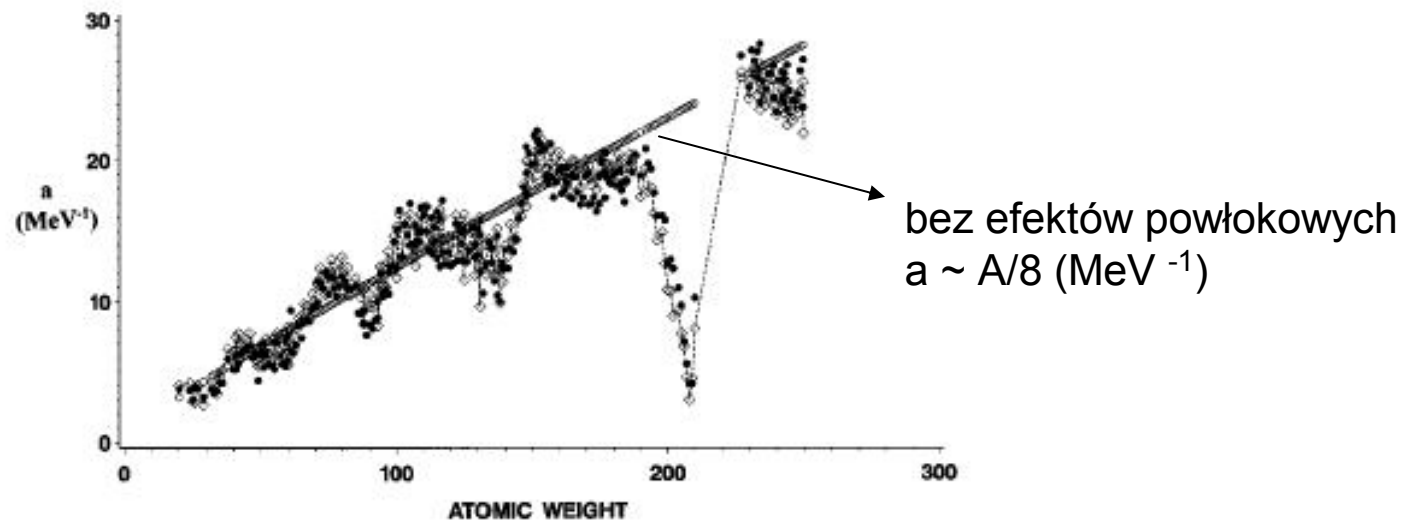


FIG. 2. The derived level density parameter (solid circles) compared with calculations (diamonds) by taking into account shell effects.

S.F. Mughabghab and C. Dunford, PRL 81 (1998) 4083

Dla niskich  $U$

$$\rho(U, J) = \frac{2J + 1}{24U^{5/4} 2^{1/2} \sigma^3} e^{2(aU)^{1/2}} e^{-J(J+1)/2\sigma^2}$$

## Model statystyczny cd.

$$\sigma^J(a,b) = \sigma_{CN}^J(a) G_{CN}^J(b)$$

Hipoteza niezależności

$$G_{CN}^J(b) = \frac{\sigma_{CN}^J(b)k_b^2}{\sum_{b'} \sigma_{CN}^J(b')k_{b'}^2}$$

Zasada równowagi szczegółowej

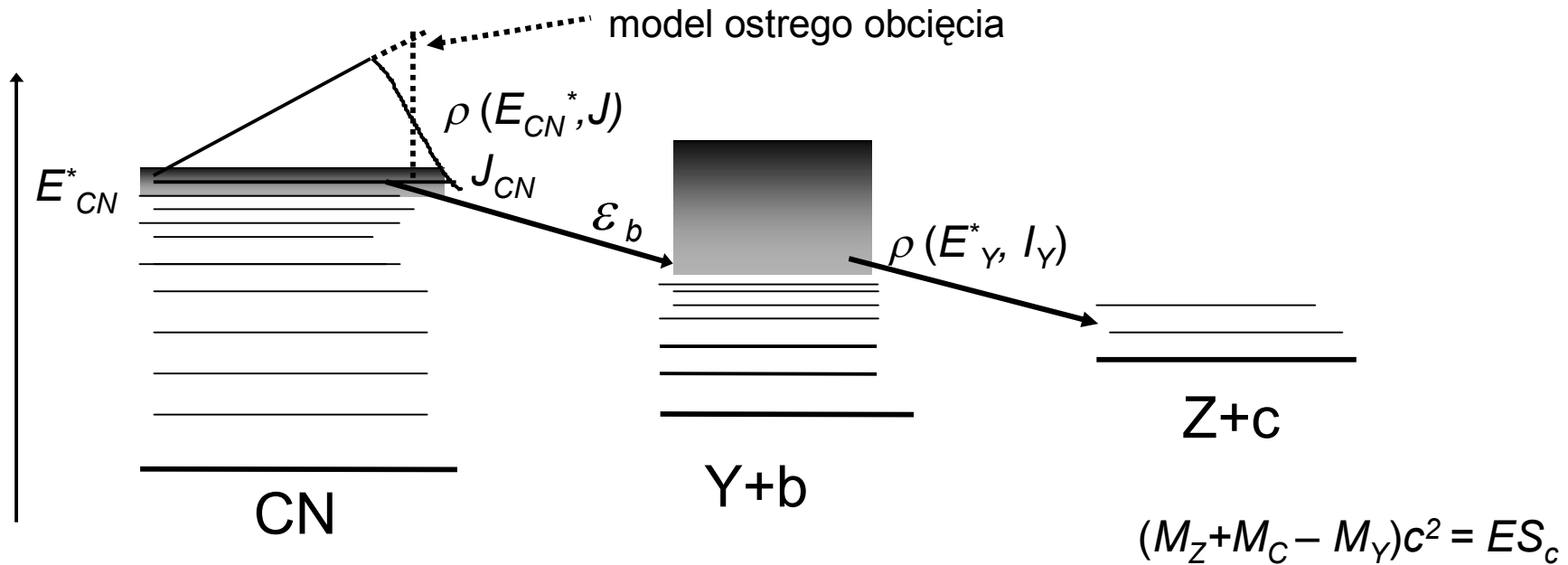
– rozpad jądra złożonego  $\Gamma/D \gg 1$

Jądro końcowe silnie wzbudzone aby było dużo otwartych kanałów rozpadu CN.  
Dla jąder ciężkich energia wzbudzenia jądra końcowego – kilka MeV.

3 sposoby rozpadu

- Emisja lekkich cząstek
- Rozszczepienie
- Emisja promieniowania  $\gamma$

# 1. Emisja lekkich cząstek



$$E_{CN}^* = E_{CM} + Q_{fus}$$

$$(M_b + M_Y)c^2 - M_{CN}c^2 = ES_b$$

energia separacji cząstki b

$$M_{CN}c^2 + E_{CN}^* = (M_b + M_Y)c^2 + \epsilon_b + E_b^* + E_Y^* \quad (\text{prawo zachowania energii})$$

$$E_b^* + E_Y^* = E_{CN}^* - ES_b - \epsilon_b \quad (b - \text{lekka cząstka (n,p,d,t,.....)} \Rightarrow E_b^* = 0)$$

$$E_Y^* = E_{CN}^* - ES_b - \epsilon_b \quad 0 \leq \epsilon_b \leq E_b^{max} = E_{CN}^* - ES_b$$

Jeśli  $E_Y^* > ES_c$  to emisja kolejnej cząstki jest możliwa



Prawdopodobieństwo emisji na jednostkę czasu cząstki  $b$  o energii w przedziale  $\{\varepsilon_b, \varepsilon_b + d\varepsilon_b\}$  z jądra  $CN$  o  $E_{CN}^*$  ( V. Weisskopf, Phys. Rev. 52 (1937) 295)

W objętości  $\Omega$  – mamy jądro  $Y^*$  i cząstkę  $b$  o energii w zakresie  $\{\varepsilon_b, \varepsilon_b + d\varepsilon_b\}$  i prędkości  $v=(2\varepsilon_b/m_b)^{1/2}$  (dla cząstek naładowanych  $\varepsilon_b > V_C$ ). Średnie prawdopodobieństwo wychwytu cząstki  $b$  przez jądro końcowe  $Y^*(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b)$  i wytworzenie jądra  $CN$  o energii wzbudzenia w zakresie  $E_{CN}^*, E_{CN}^* + d\varepsilon_b$  na jednostkę czasu

$$P_{CN} = \sigma_{CN}(E_{Y^*}, \varepsilon_b) v / \Omega .$$

Prawdopodobieństwo procesu odwrotnego uzyskamy poprzez podzielenie  $P_{CN}$  przez liczbę stanów do których cząstka  $b$  może być wychwycona -  $\rho_{CN}(E_{CN}^*) d\varepsilon_b$  i pomnożenie przez liczbę stanów do których jądro  $CN^*$  może się rozpaść -  $\rho_Y(E_{Y^*}) d\varepsilon_b$  i liczbę stanów kwantowych lekkiej cząstki  $b$  zawartych w elemencie przestrzeni energetycznej  $\{\varepsilon_b, \varepsilon_b + d\varepsilon_b\}$  i objętości  $\Omega$

gęstość stanów jednocząstkowych  $\rho(\varepsilon_b) = \frac{g_b \Omega m_b}{h^3} 4\pi (2m_b \varepsilon_b)^{1/2}$

$$P_b(\varepsilon_b) d\varepsilon_b = \sigma_{CN}(E_{Y^*}, \varepsilon_b) \sqrt{\frac{2\varepsilon_b}{m_b}} \frac{g_b m_b 4\pi \sqrt{2m_b \varepsilon_b}}{h^3} \frac{\rho_Y(E_{Y^*})}{\rho_{CN}(E_{CN}^*)} d\varepsilon_b$$

$$P_b(\varepsilon_b) d\varepsilon_b = \sigma_{CN}(E_{Y^*}, \varepsilon_b) \frac{g_b m_b \varepsilon_b}{\pi^2 \hbar^3} \frac{\rho_Y(E_{Y^*})}{\rho_{CN}(E_{CN}^*)} d\varepsilon_b$$

$$\Gamma_b = \hbar \int_0^{E_{CN} - ES_b} P(\varepsilon_b) d\varepsilon_b = \int_0^{E_{CN}^* - ES_b} \sigma_{CN}(E_Y^*, \varepsilon_b) \frac{g_b m_b \varepsilon_b}{\pi^2 \hbar^2} \frac{\rho_Y(E_Y^*)}{\rho_{CN}(E_{CN}^*)} d\varepsilon_b$$

formuła Weisskopfa

$$E_{CN}^*, J \rightarrow Y^*, I_Y; b, l_b$$

$$\Gamma_b(E_{CN}^*, J) = \sum_{I_Y} \frac{g_b m_b}{\pi^2 \hbar^2 \rho_{CN}(E_{CN}^*, J)} \int_0^{E_{CN}^* - ES_b} \rho_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b, I_Y) \varepsilon_b \sigma_{CN}(Y^*, I_Y; b, l_b, \varepsilon_b) d\varepsilon_b$$

Liczba cząstek emitowanych w przedział energii wzbudzenia jądra Y -  $[E_Y^*, E_Y^* - d\varepsilon_b]$ .

$$N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b \propto P_b d\varepsilon_b \propto \sum_{I_Y} \rho_Y(E_Y^*, I_Y) \varepsilon_b \sigma_{CN}(Y^*, I_Y; b, l_b, \varepsilon_b) d\varepsilon_b$$

zakładamy  $\rho(E^*, I) = \rho(E^*) \rho(I)$  i  $\sigma$  - niezależny od spinu

$$N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b \propto \text{const } \varepsilon_b \sigma_{CN}(Y^*; b, \varepsilon_b) \rho_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b) d\varepsilon_b$$

$$\rho_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b) = \rho_Y(0) \exp \left[ \frac{S_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b)}{k} \right]$$

Dla  $\varepsilon_b \ll E_{CN}^* - SE_b$

$$S_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b) = S_Y(E_{CN}^* - ES_b) - \varepsilon_b \left. \frac{\partial S_Y(E)}{\partial E} \right|_{E=E_{CN}^* - ES_b} + \dots \quad 4$$

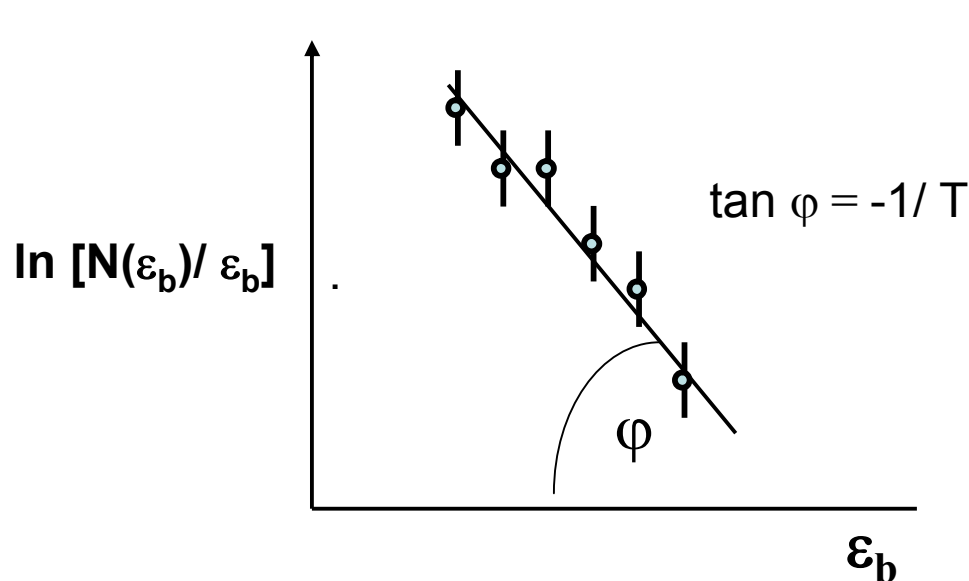
$$S_Y(E_{CN}^* - SE_b) = 2k\sqrt{a(E_{CN}^* - ES_b)} \quad \left. \frac{\partial S_Y(E)}{\partial E} \right|_{E=E_{CN}^* - ES_b} = \frac{k}{T}$$

$$\rho_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b) = \rho_Y(0) \exp(2\sqrt{a(E_{CN}^* - ES_b)}) \exp\left(\frac{-\varepsilon_b}{T}\right)$$

Formuła Weisskopfa-Ewinga

$$N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b \propto d\sigma(a, b) = \text{const} \varepsilon_b \sigma(b, \varepsilon_b) \exp\left(\frac{-\varepsilon_b}{T}\right) d\varepsilon_b$$

Widmo cząstek emitowanych (wyparowanych) z CN opisane **rozkładem Maxwella**



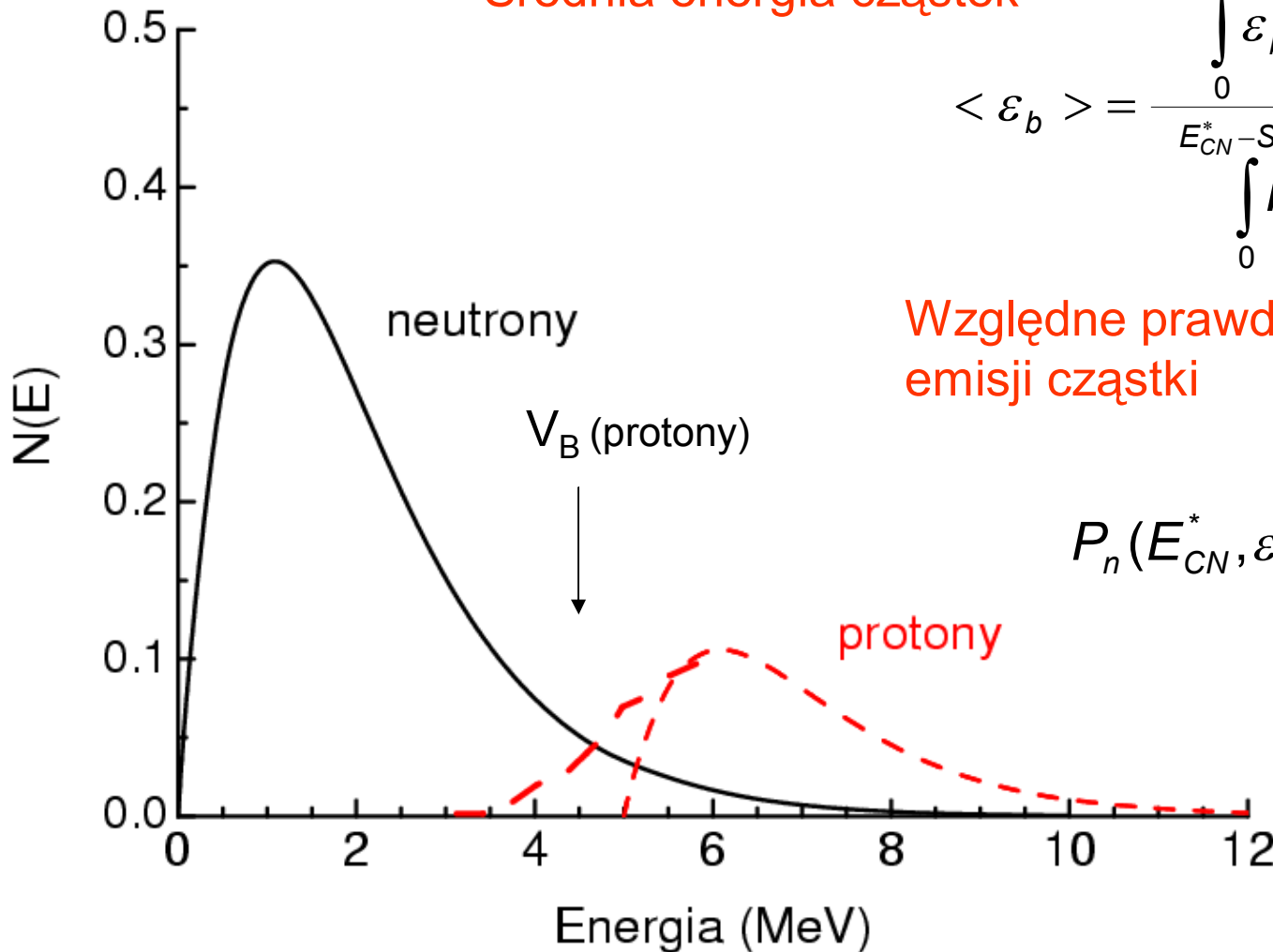
$$N(\varepsilon_b) \propto \text{const} \varepsilon_b \exp\left(\frac{-\varepsilon_b}{T}\right)$$

Maksimum rozkładu  $\frac{dN(\varepsilon_b)}{d\varepsilon_b} = 0$   $N(\varepsilon_b) \propto \text{const } \varepsilon_b \exp\left(\frac{-\varepsilon_b}{T}\right)$

$$e^{\frac{-\varepsilon_b}{T}} - \frac{\varepsilon_b}{T} e^{\frac{-\varepsilon_b}{T}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_b = T$$

Średnia energia cząstek

$$\langle \varepsilon_b \rangle = \frac{\int_0^{E_{CN}^* - SE_b} \varepsilon_b N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b}{\int_0^{E_{CN}^* - SE_b} N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b} \approx 2T$$



Względne prawdopodobieństwo emisji cząstki

$$P_n(E_{CN}^*, \varepsilon_1) = \frac{\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1 + d\varepsilon_b} N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b}{\int_0^{E_{CN}^* - SE_b} N(\varepsilon_b) d\varepsilon_b}$$

## 2. Rozszczepienie

SEPTEMBER 1, 1939

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 56

### The Mechanism of Nuclear Fission

NIELS BOHR

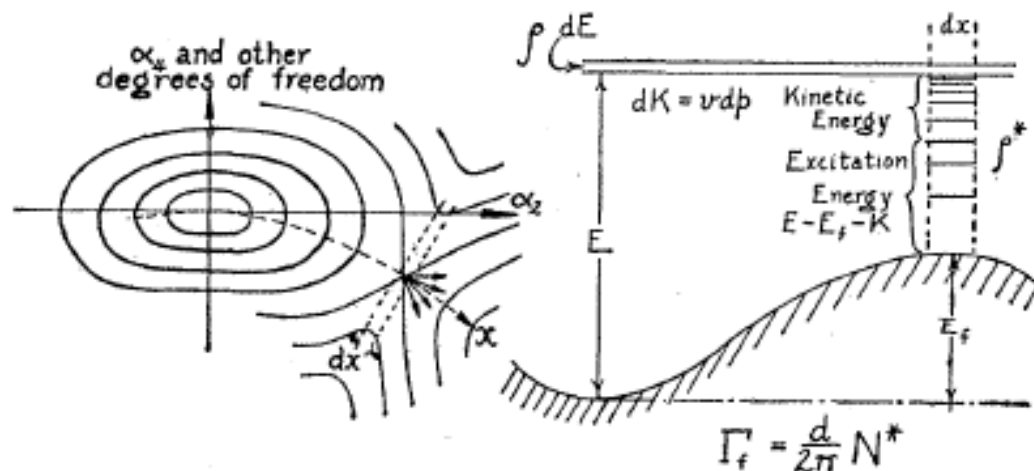
*University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark, and The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

AND

JOHN ARCHIBALD WHEELER

*Princeton University, Princeton, New Jersey*

(Received June 28, 1939)



Zakładamy, że rozszczepienie następuje poprzez ciągły wzrost deformacji od kształtu jądra złożonego w stanie o energii wzbudzenia  $E_{CN}^*$  do deformacji punktu rozerwania. Energia deformacji zmniejsza energię wzbudzenia.

FIG. 3. The potential energy associated with any arbitrary deformation of the nuclear form may be plotted as a function of the parameters which specify the deformation, thus giving a contour surface which is represented schematically in the left-hand portion of the figure. The pass or saddle point corresponds to the critical deformation of unstable equilibrium. To the extent to which we may use classical terms, the course of the fission process may be symbolized by a ball lying in the hollow at the origin of coordinates (spherical form) which receives an impulse (neutron capture) which sets it to executing a complicated Lissajous figure of oscillation about equilibrium. If its energy is sufficient, it will in the course of time happen to move in the proper direction to pass over the saddle point (after which fission will occur), unless it loses its energy (radiation or neutron re-emission). At the right is a cross section taken through the fission barrier, illustrating the calculation in the text of the probability per unit time of fission occurring.

## Metoda stanów przejściowych

„The number of nuclei which divide per unit time will be equal to the number of nuclei in the transition state which pass outward over the fission barrier per unit time. „

Punkt siodłowy definiujemy jako stan przejściowy o energii wzbudzenia

$$E_f^* = E_{CN}^* - B_f - K \quad K \text{ (energia kinetyczna deformacji)}$$

$$\Gamma_{fiss}(E_{CN}^*, J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_f^{\max}} \frac{\rho_{fiss}(E_f^{\max} - K, J)}{\rho_{CN}(E_{CN}^*, J)} dK$$

$$E_f^{\max} = E_{CN}^* - B_f$$

Formuła Bohra-Wheelera

### 3. Promieniowanie $\gamma$

Można pominąć gdy energia wzbudzenia jądra jest większa od energii separacji cząstki lub wysokości bariery na rozszczepienie.

$$\Gamma_{\gamma}(E_{CN}^*, J) = \frac{1}{2\pi \rho_{CN}(E_{CN}^*)} \sum_L \sum_{I=|J-L|}^{J+L} \int \varepsilon_{\gamma}^{2L+1} \xi_L \rho_{CN}(E_{CN}^* - \varepsilon_{\gamma}, I) d\varepsilon_{\gamma}$$

$\xi_L$  - funkcja nasilenia promieniowania o multipolowości  $L$

$$\Gamma_b(E_{CN}^*, J) = \sum_{l_Y} \frac{g_b m_b}{\pi^2 \hbar^2 \rho_{CN}(E_{CN}^*, J)} \int_0^{E_{CN}^* - ES_b} \rho_Y(E_{CN}^* - ES_b - \varepsilon_b, l_Y) \varepsilon_b \sigma_{CN}(Y^*, l_Y; b, l_b, \varepsilon_b) d\varepsilon_b$$

$$\Gamma_{fiss}(E_{CN}^*, J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_f^{\max}} \frac{\rho_{fiss}(E_f^{\max} - K, J)}{\rho_{CN}(E_{CN}^*, J)} dK$$

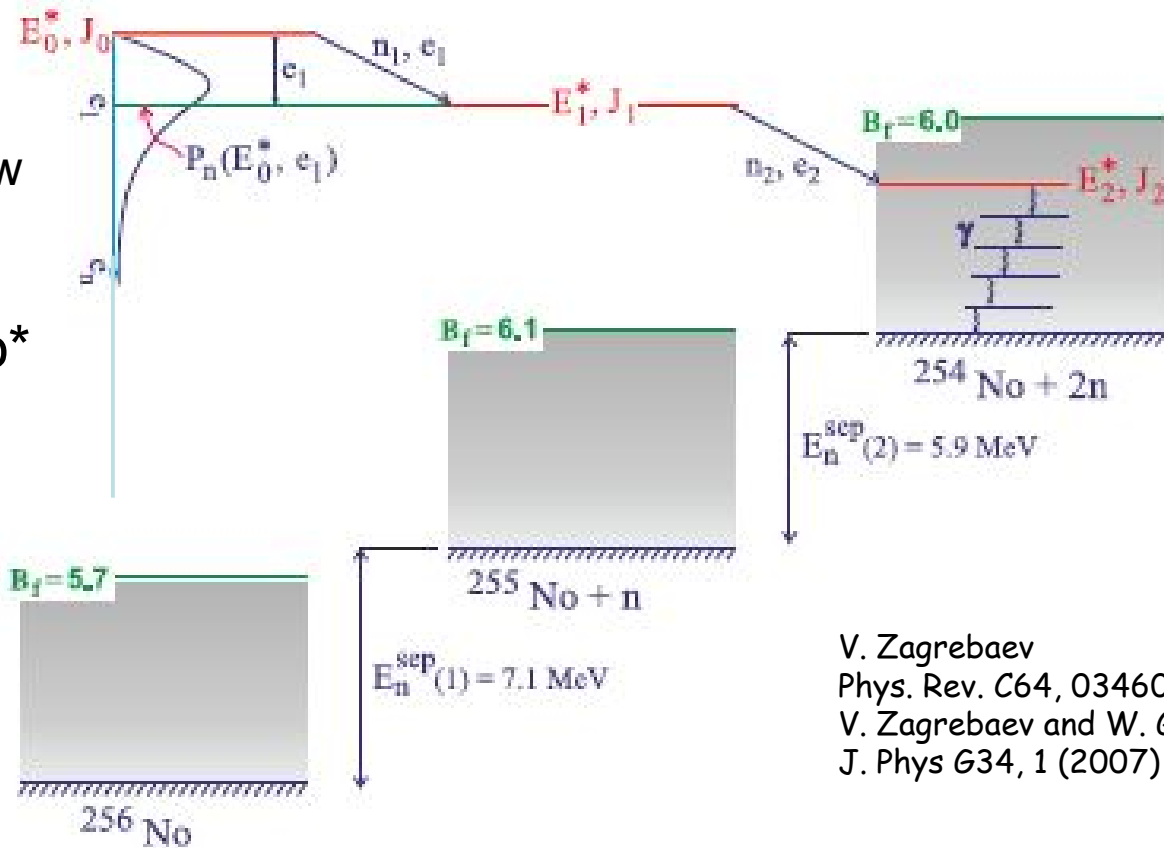
$$\Gamma_\gamma(E_{CN}^*, J) = \frac{1}{2\pi \rho_{CN}(E_{CN}^*, J)} \sum_L \sum_{l=|J-L|}^{J+L} \int \varepsilon_\gamma^{2L+1} \xi_L \rho_{CN}(E_{CN}^* - \varepsilon_\gamma, l) d\varepsilon_\gamma$$

Całkowita szerokość  $\Gamma_{tot} = \sum_b \Gamma_b + \Gamma_{fiss} + \Gamma_\gamma$

Względne prawdopodobieństwo rozpadu jądra przy energii wzbudzenia  $E^*$  w określony kanał wyjściowy  $c$  (emisja lekkiej cząstki, rozszczepienie lub emisja  $\gamma$ )

$$\frac{\Gamma_c}{\Gamma_{tot}}$$

prawdopodobieństwo  
rozpadu CN\* poprzez  
wyparowanie x neutronów

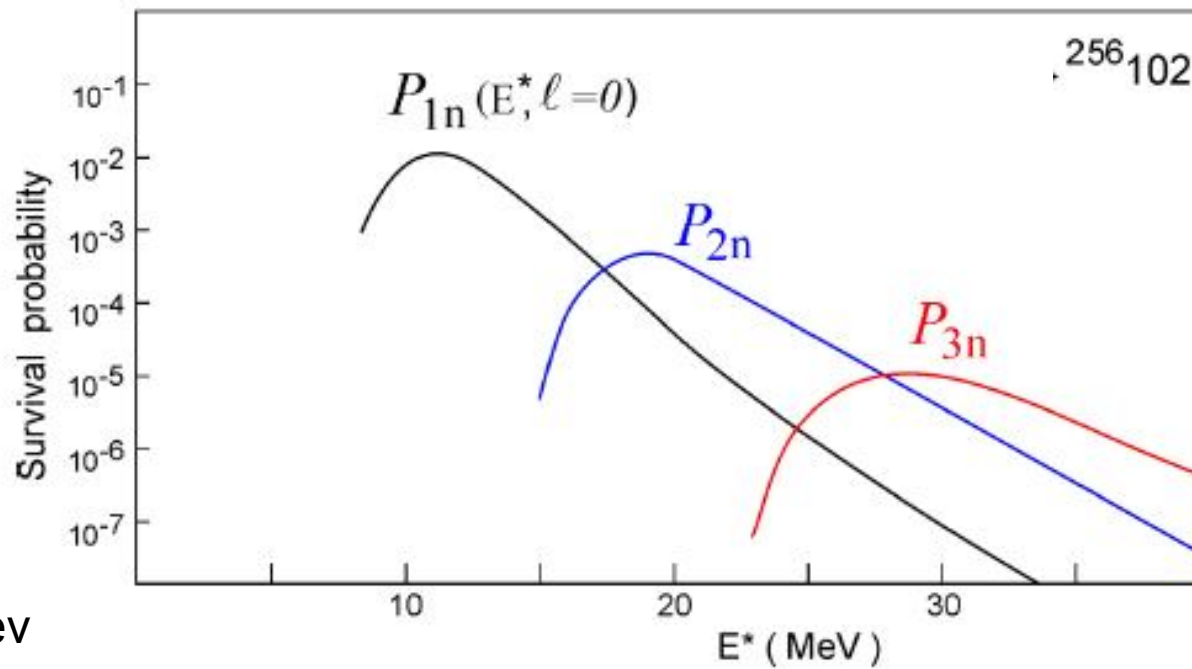
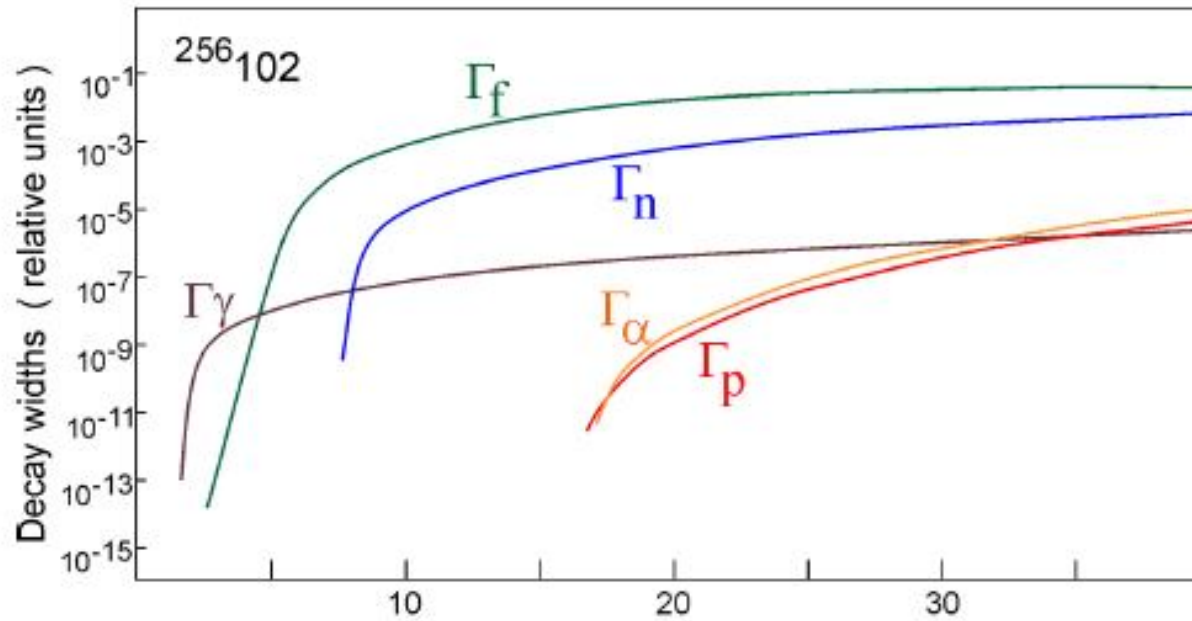


V. Zagrebaev  
Phys. Rev. C64, 034606 (2001)  
V. Zagrebaev and W. Greiner  
J. Phys G34, 1 (2007)

$$P_{\text{EvR}}(C \rightarrow B + xn) = \int_0^{E_0^* - E_n^{\text{sep}}(1)} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{\text{tot}}}(E_0^*, J_0) P_n(E_0^*, e_1) de_1 \int_0^{E_1^* - E_n^{\text{sep}}(2)} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{\text{tot}}}(E_1^*, J_1) P_n(E_1^*, e_2) de_2 \dots \int_0^{E_{x-1}^* - E_n^{\text{sep}}(x)} \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{\text{tot}}}(E_{x-1}^*, J_{x-1}) P_n(E_{x-1}^*, e_x) \cdot G_{N\gamma}(E_x^*, J_x \rightarrow g.s.) de_x \quad )$$

Here  $\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ ,  $E_n^{\text{sep}}(k)$  and  $e_k$  are the binding and kinetic energies of the  $k^{\text{th}}$  evaporated neutron,  $E_k^* = E_0^* - \sum_{i=1}^k [E_n^{\text{sep}}(i) + e_i]$  is the excitation energy of the residual nucleus after the emission of  $k$  neutrons,







# Ograniczenia przekrojów czynnych na reakcje fuzji

## 1. Kanał wejściowy

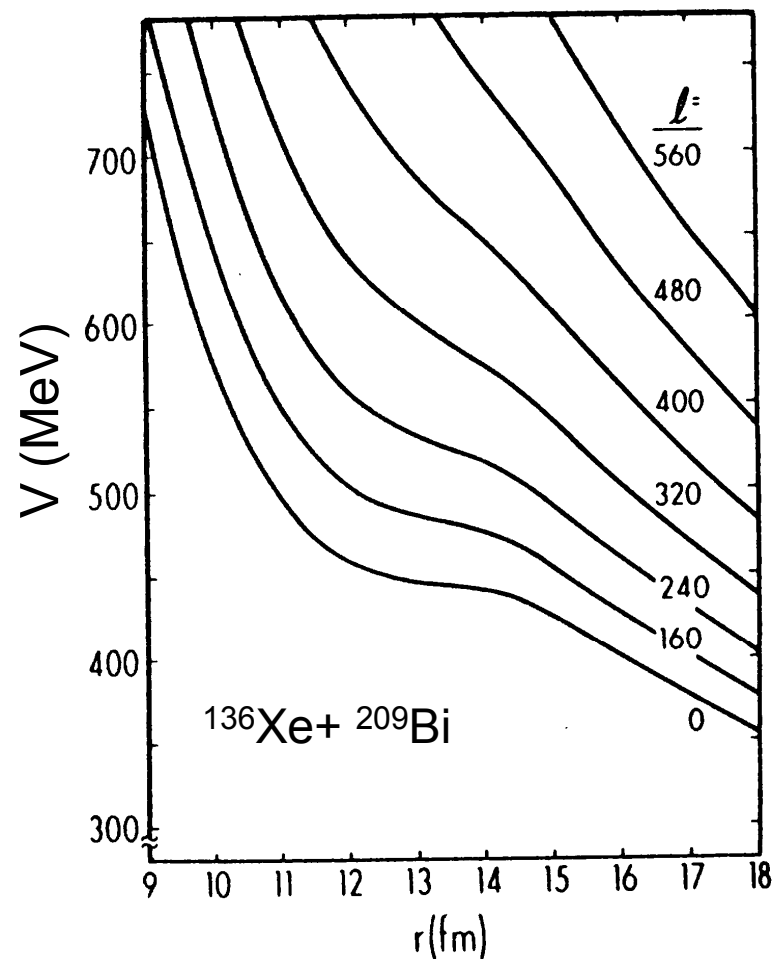
Warunkiem koniecznym na **powstanie jądra złożonego** jest istnienie **minimum** w całkowitym **potencjale** jądro-jądro **kanału wejściowego**

$$V_\ell(r) = V_C(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_N(r)$$

**Zanikanie** minimum:

- bardzo **silny potencjał kulombowski** (duży iloczyn  $Z_1 Z_2 \geq 1600$ )

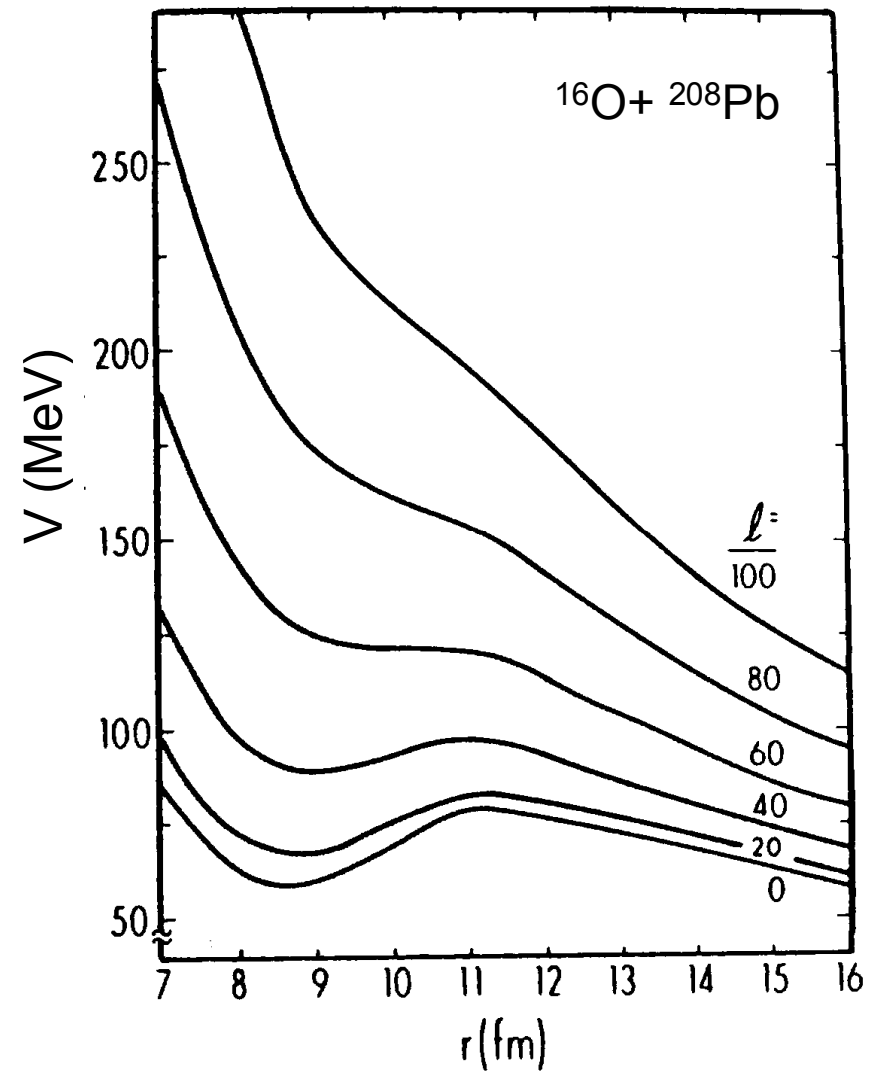
Dla reakcji wywołanych przez ciężkie jony o dużym  $Z$  na ciężkich tarczach reakcja fuzji odgrywa malejącą rolę wraz ze wzrostem iloczynu  $Z_1 Z_2$ .



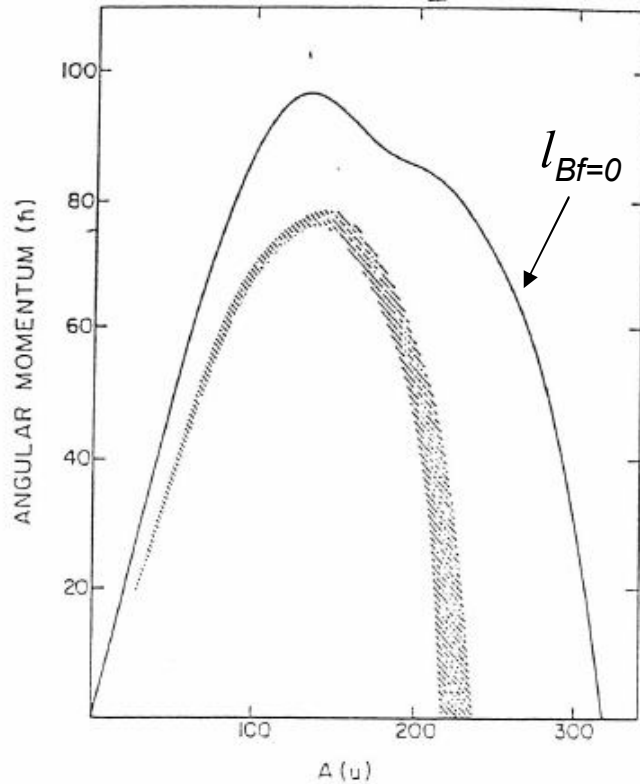
- duża wartość momentu pędu ruchu względnego

$l_{crit}^{fus}$  - wartość  $l$  dla której zanika minimum w całkowitym potencjale

$$\sigma_{fus}(E) = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{crit}^{fus}} (2l+1) T_l(E)$$



## 2. Niestabilność jądrowa tworzonego jądra złożonego



$l$  dla którego zanika bariera na rozszczepienie

$$\sigma_{fus}(E) = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{l_{Bf=0}} (2l + 1) T_l(E)$$

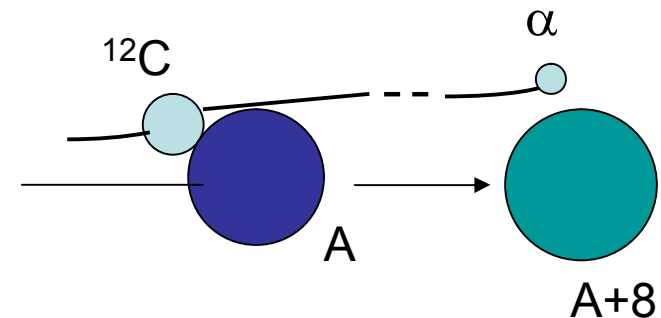
O ograniczeniu decyduje mniejsza z wartości  $l_{Bf=0}$ ,  $l_{crit}^{fus}$ .

Jakie procesy zachodzą dla  $l > l_{crit}^{fus}$  ?

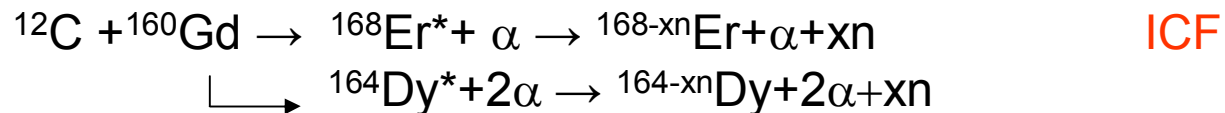
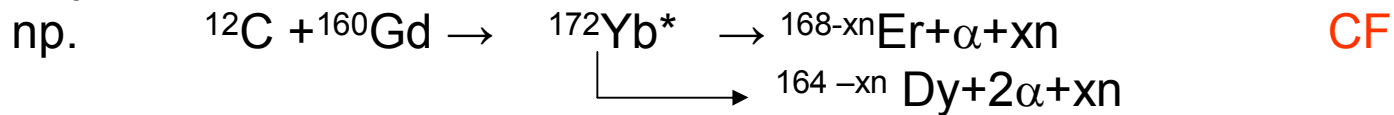
Dla lekkih pocisków typowym procesem są reakcje niekompletnej fuzji (ICF).  
 Część pocisku zostaje wychwycona przez jądro tarczy i tworzy jądro złożone a pozostałość porusza się z zachowaniem prędkości pocisku wzdłuż swojej klasycznej trajektorii.

Badane reakcje :

1. Pocisk słabo związany  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$ .....
2. Pociski o strukturze alfowej  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$ ....



Problemy: te same kanały wyjściowe dla reakcji kompletnej (CF) i niekompletnej fuzji (ICF).



Metodyka badań – koincydencje cząstka naładowana – promieniowanie  $\gamma$ ,  
 teleskopy półprzewodnikowe identyfikują cząstki naładowane  $p$ ,  $d$ ,  $t$ ,  $\alpha$ ,  $2\alpha$  ....  
 układ detektorów promieniowania  $\gamma$  pozwala identyfikować pozostałość jądra złożonego (ER) poprzez charakterystyczne promieniowanie  $\gamma$ .

Różnice:

CF

ICF

widmo cząstek

kształt Boltzmanowski

maksimum wokół  $V_{pocisku}$

rozkłady kątowe

symetryczne wokół  $90^0$

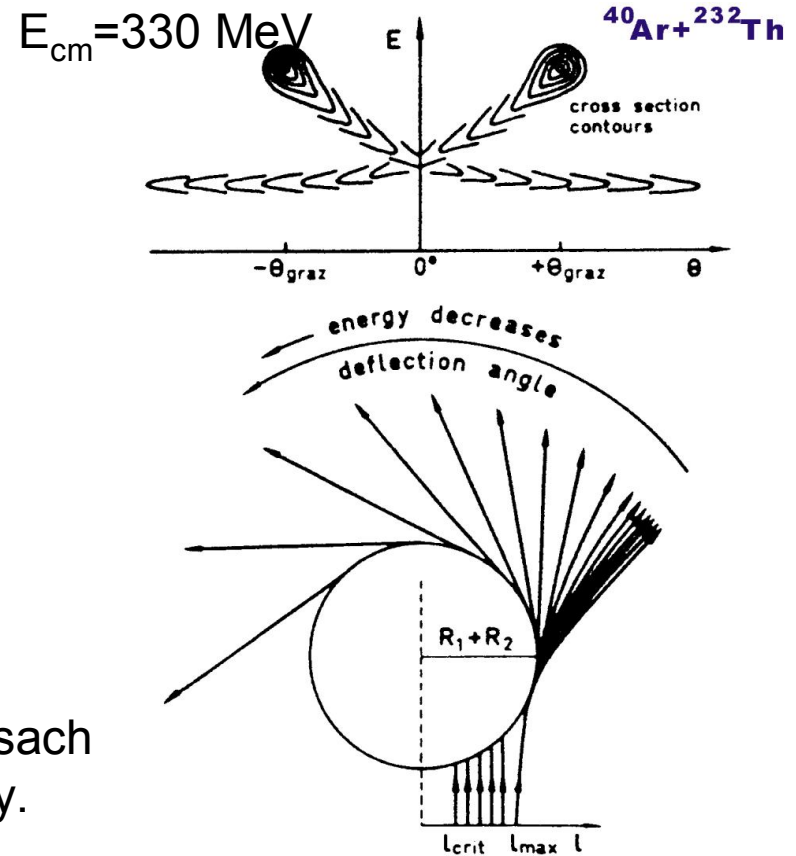
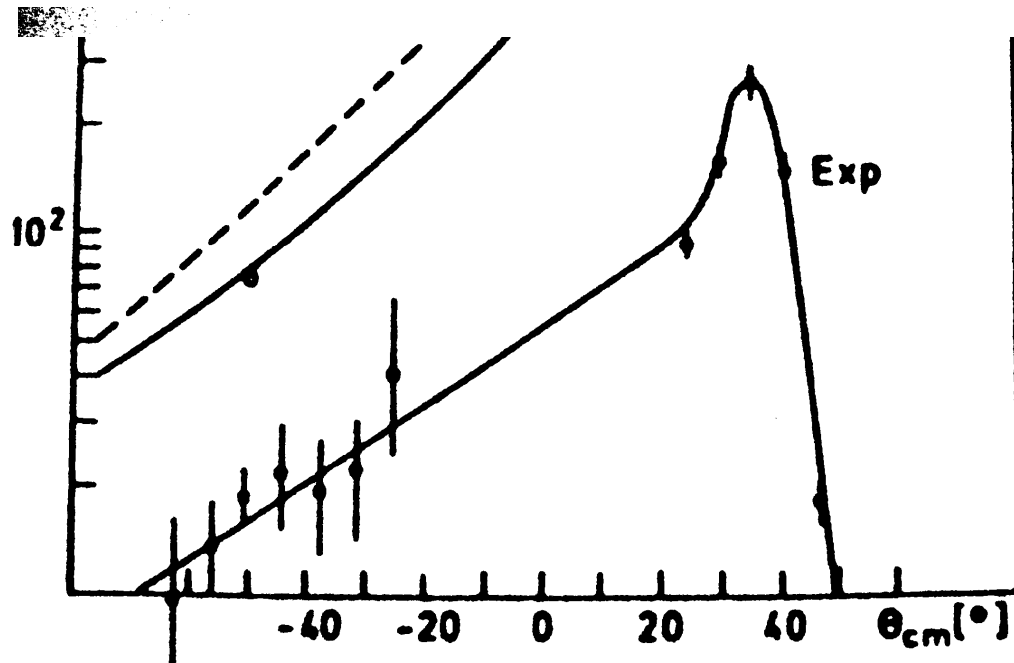
maksimum w kątach przednich

Krotność  $\gamma$   
pozwala określić b

zderzenia centralne

zderzenia bardziej peryferyjne

Dla średnio ciężkich i ciężkich pocisków w obszarze  $l > l_{crit}^{fus}$  dominują procesy binarne – zderzenia głęboko nieelastyczne (deep inelastic collisions **DIC**)



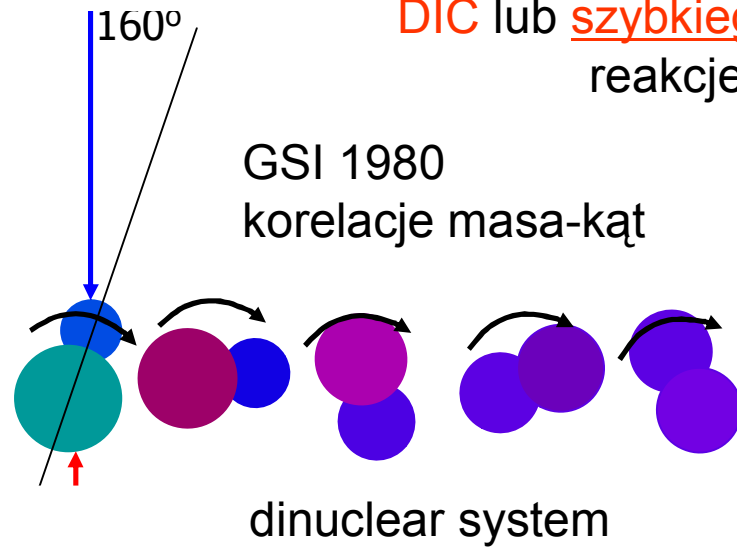
1. W kanale wyjściowym tylko dwa produkty o masach niewiele różniących się od mas pocisku i tarczy.
2. Obok zdarzeń nieelastycznych są zdarzenia o dużej stracie energii. Silne wzbudzenie produktów.
3. Silna anizotropia rozkładu kąтового
4. Transfer momentu pędu z ruchu względnego do wewnętrznych stopni swobody fragmentów.

J. Wilczyński, Phys. Let. B47,487 (1973)

Wprowadzenie sił niezachowawczych (tarcia). - W reakcjach jądrowych niskich energii (zakaz Pauliego) brak zderzeń nukleon- nukleon – wprowadzono pojęcie dyssypacji jednociąłowej.



Układy **bardzo ciężkie**  $A_1+A_2 > 230$  (niestabilność jądrowa tworzonych jądra złożonego) dominacja procesów binarnych – **DIC** lub **szybkiego rozszczepienia** (fast fission, quasi-fission) reakcje wielonukleonowego transferu.



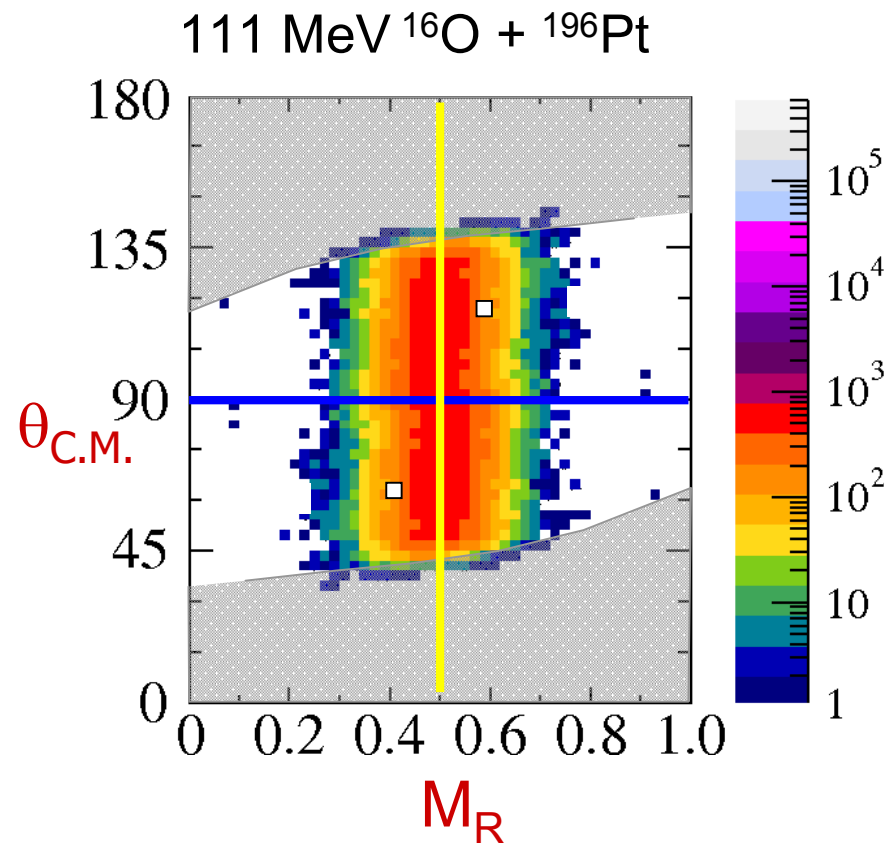
MAD – mass-angle directions

Miminal mass-angle correlation

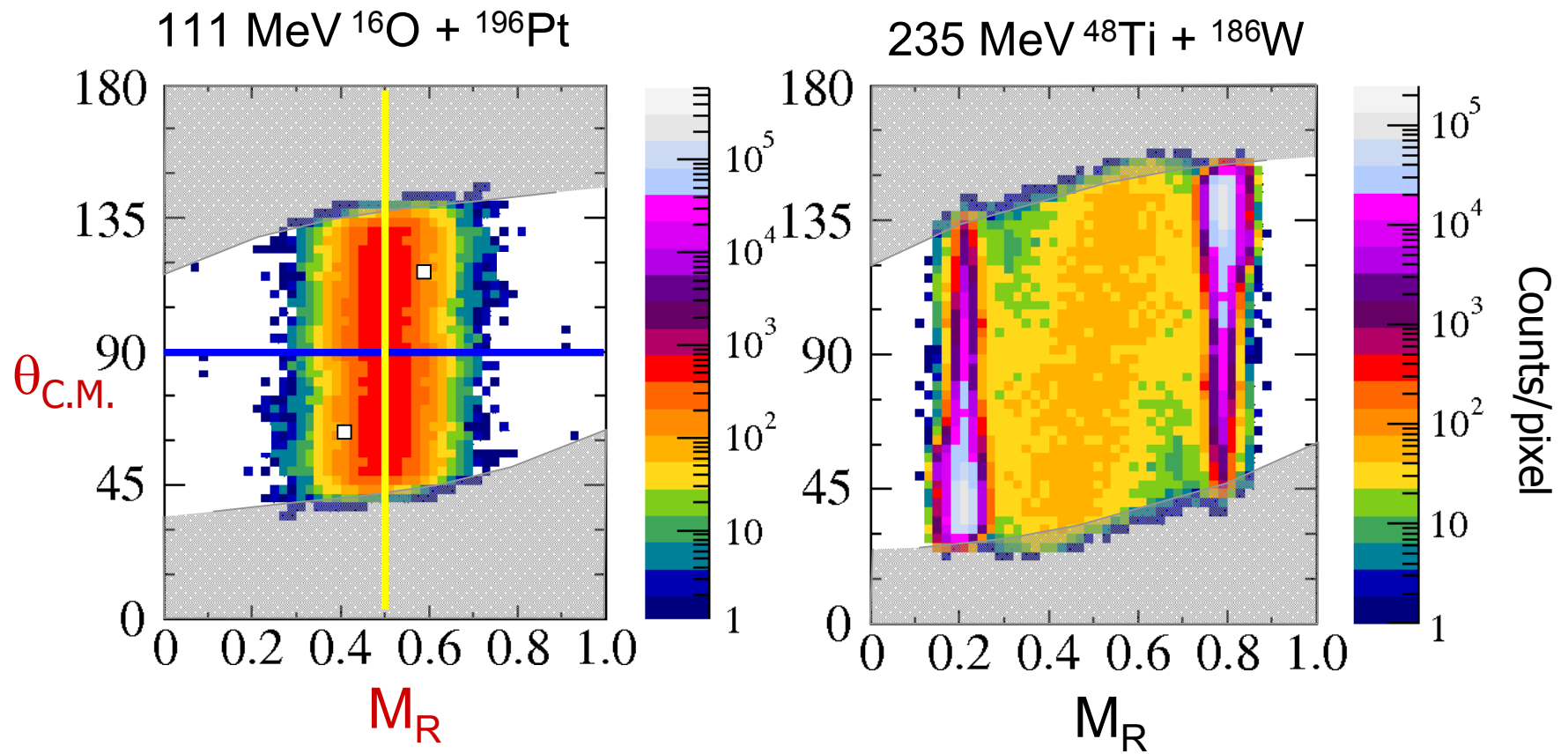
Strong mass-angle correlation



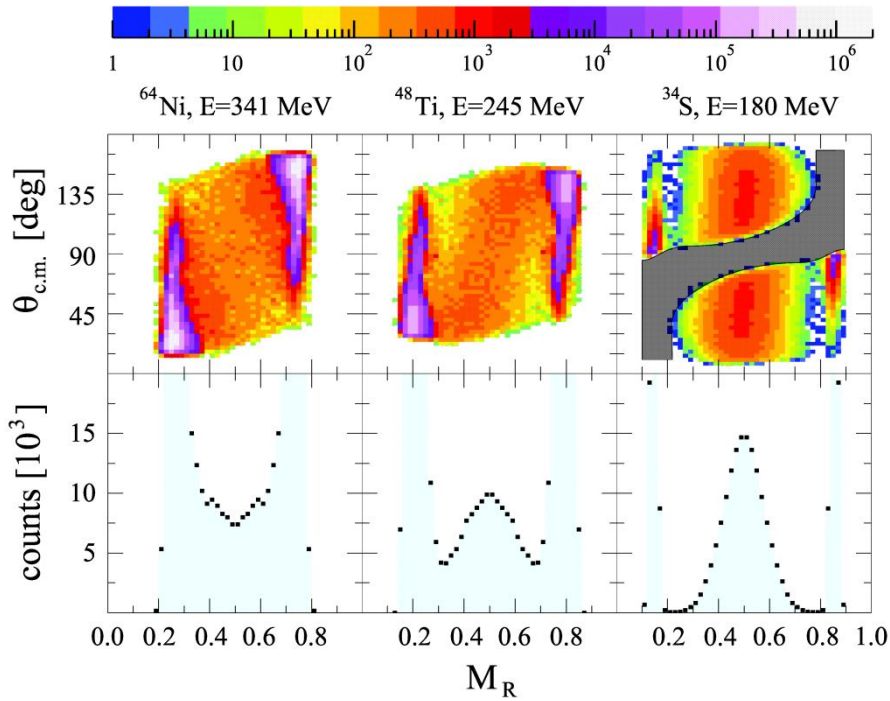
## Mass-angle distributions – MAD



## Mass-angle distributions – MAD

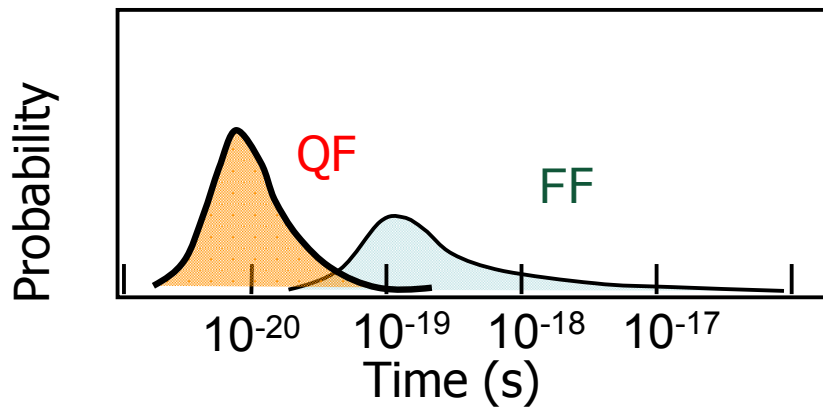


# eksperyment MAD



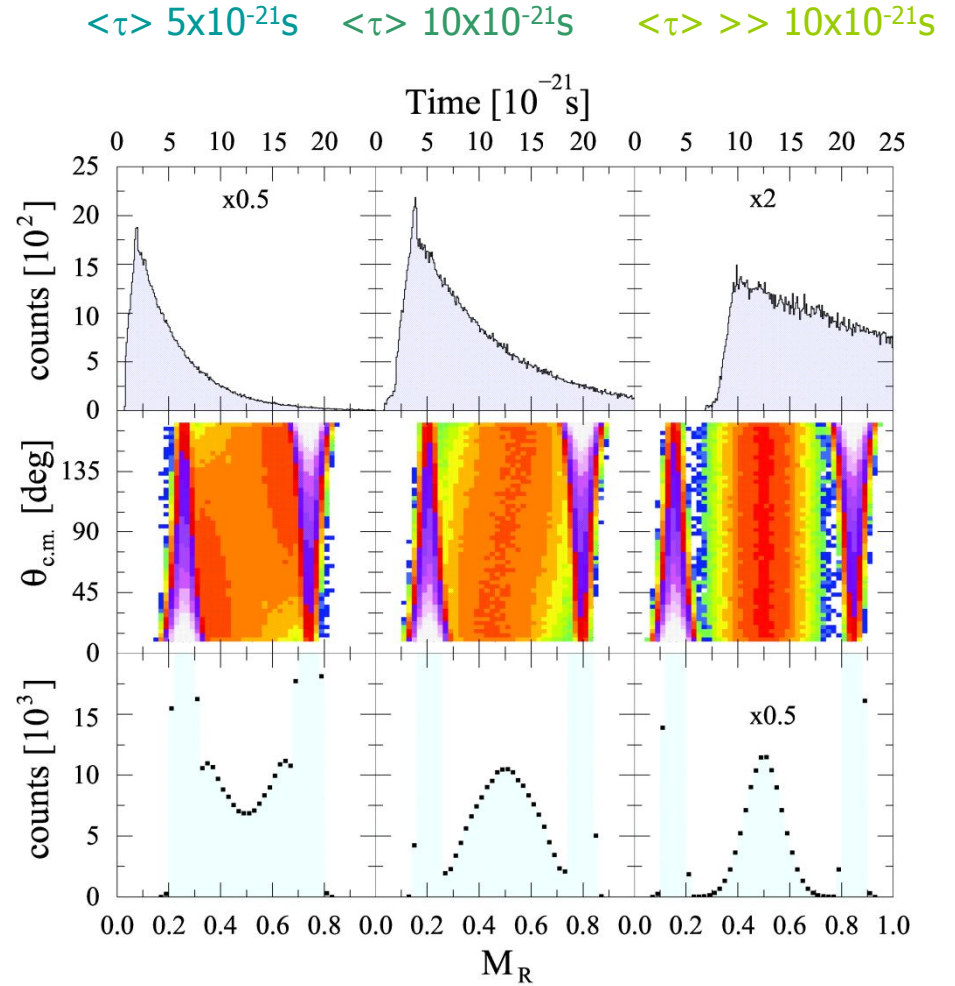
J.U. Andersen et al., PRL 99(2007)162502

J.U. Andersen et al., PRC 78(2008)064609



# $^{186}\text{W}$

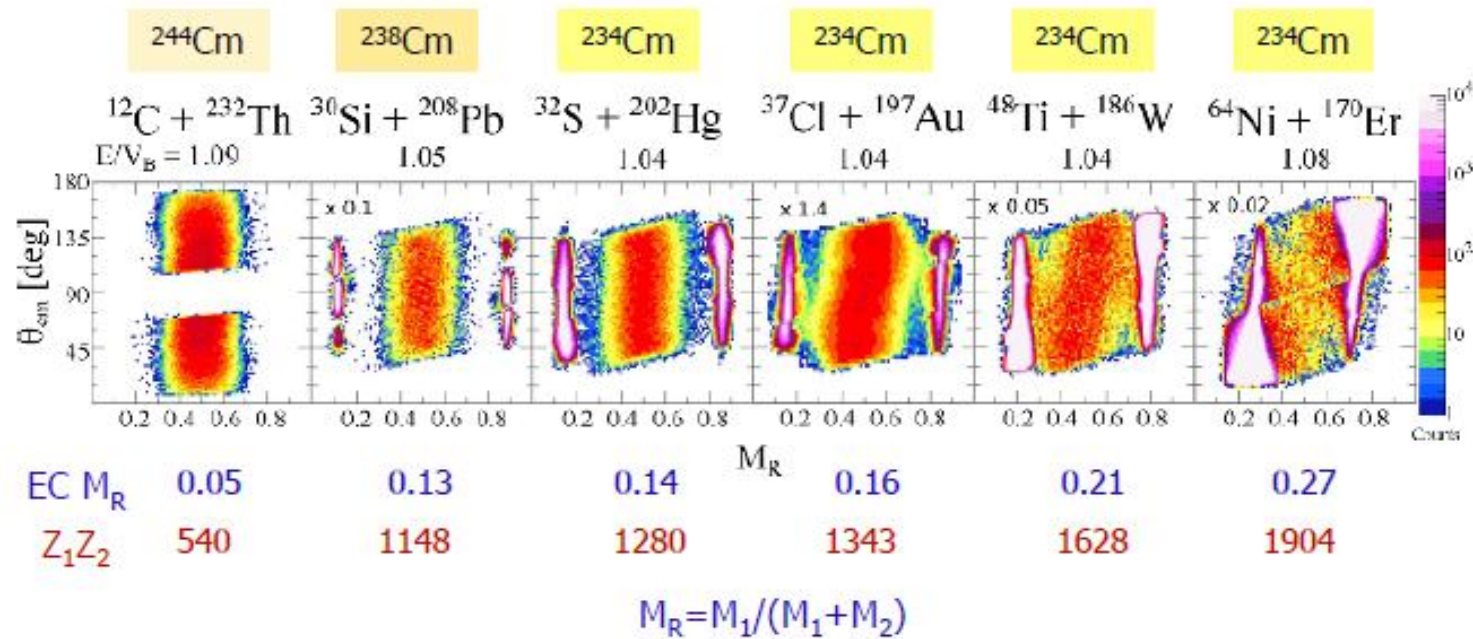
# Symulacja MAD



MAD: R. du Rietz et al. PRL 106(2011)052701

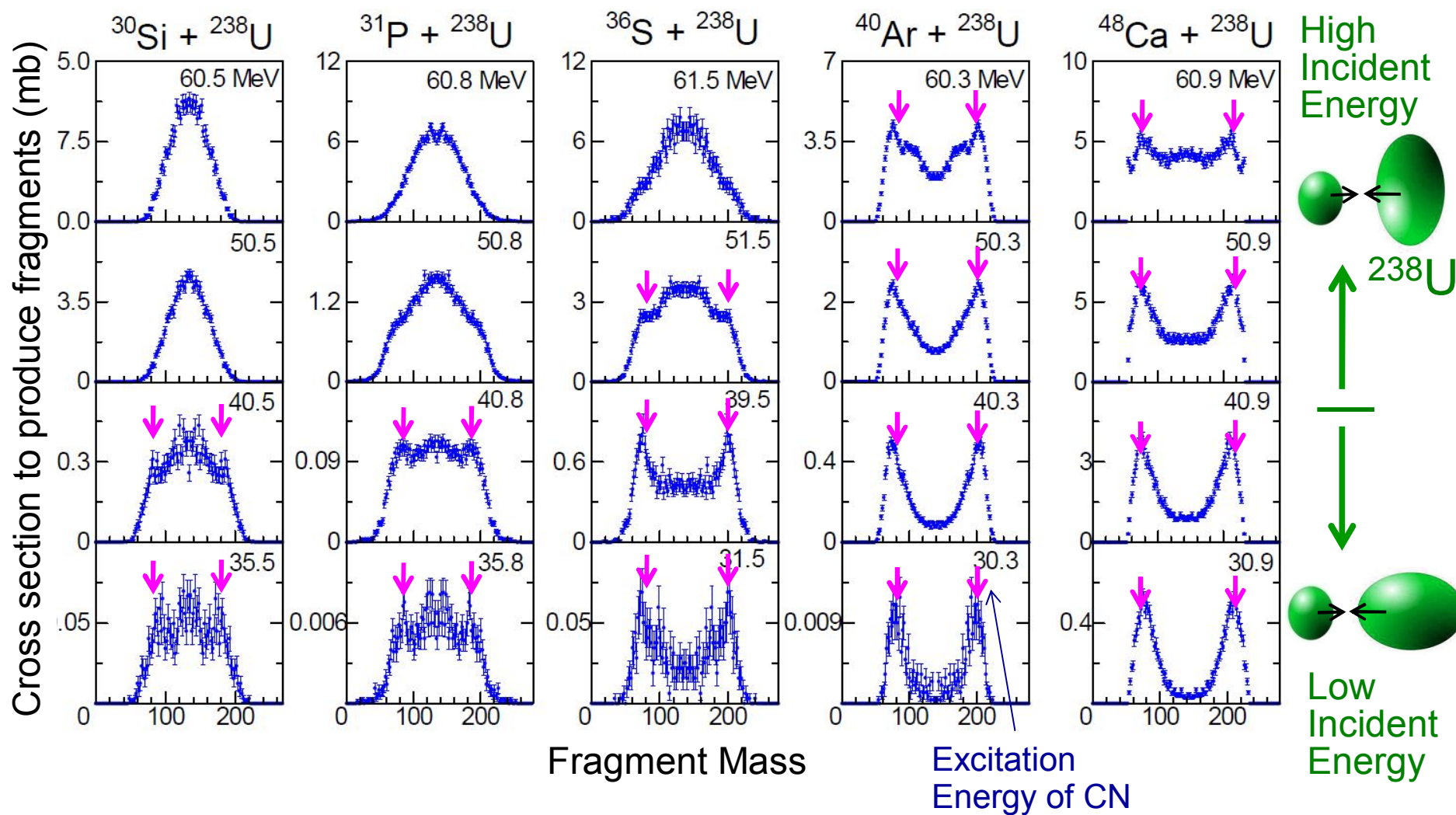
# Zależność mechanizmu reakcji od asymetrii pocisku i tarczy

EPJ Web of Conferences



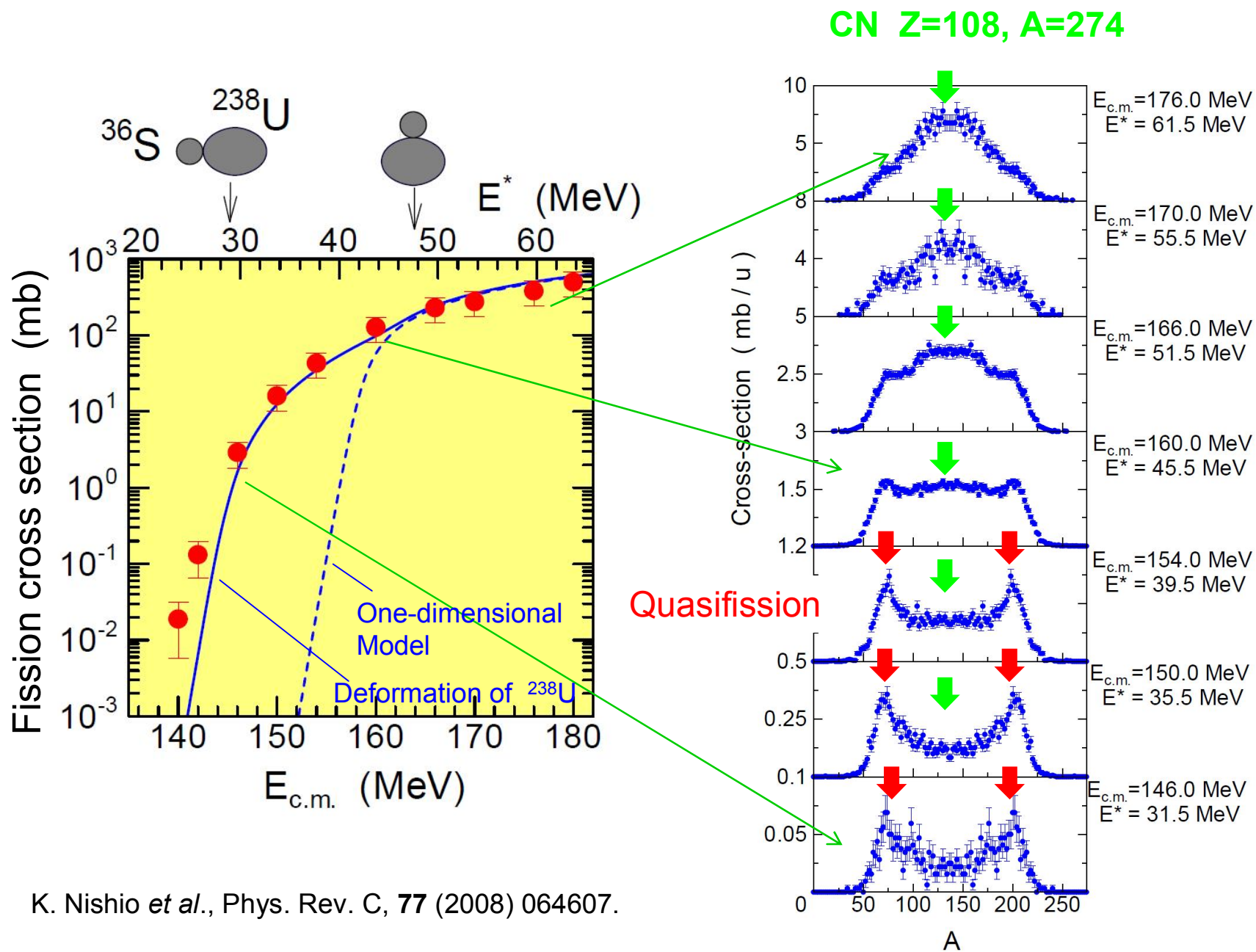
**Figure 3.** Measured mass-angle distributions for reactions forming isotopes of Curium at energies  $E$  above the respective capture barriers  $V_B$ . The  $x$  factor multiplies the maximum counts in the logarithmic colour scale. For  $^{234}\text{Cm}$  formed by projectiles from  $^{32}\text{S}$  to  $^{64}\text{Ni}$ , with entrance channel mass-ratio ( $EC M_R$ ) varying from 0.14 to 0.27, the MAD and thus the mean reaction timescale changes significantly.

# Konkurencja fast-fission i fusion-fission w funkcji asymetrii kanału wejściowego i energii pocisku



K. Nishio et al., Phys. Rev. C, **77**, 064607 (2008).  
 K. Nishio et al., Phys. Rev. C, **82**, 044604 (2010).

Quasifission



K. Nishio *et al.*, Phys. Rev. C, **77** (2008) 064607.

## Reakcje szybkiego rozszczepienia

1. Reakcje binarne o masach fragmentów różniących się znacząco od mas oddziaływujących jąder (transfer wielu nukleonów). Im mniejszy parametr zderzenia tym większy transfer masy.
2. Reakcje zachodzą w krótszej skali czasowej niż reakcje ff (fusion-fission).
3. Bardzo silna zależność przekroju czynnego od asymetrii masowej pocisku tarczy.
4. Dla **energii podbarierowych**  $\sigma(\text{fast-fission})/\sigma(\text{fusion-fission})$  rośnie gdy energia maleje.

## Najlepsze warunki eksperymentalne na proces fuzja-wyparowanie

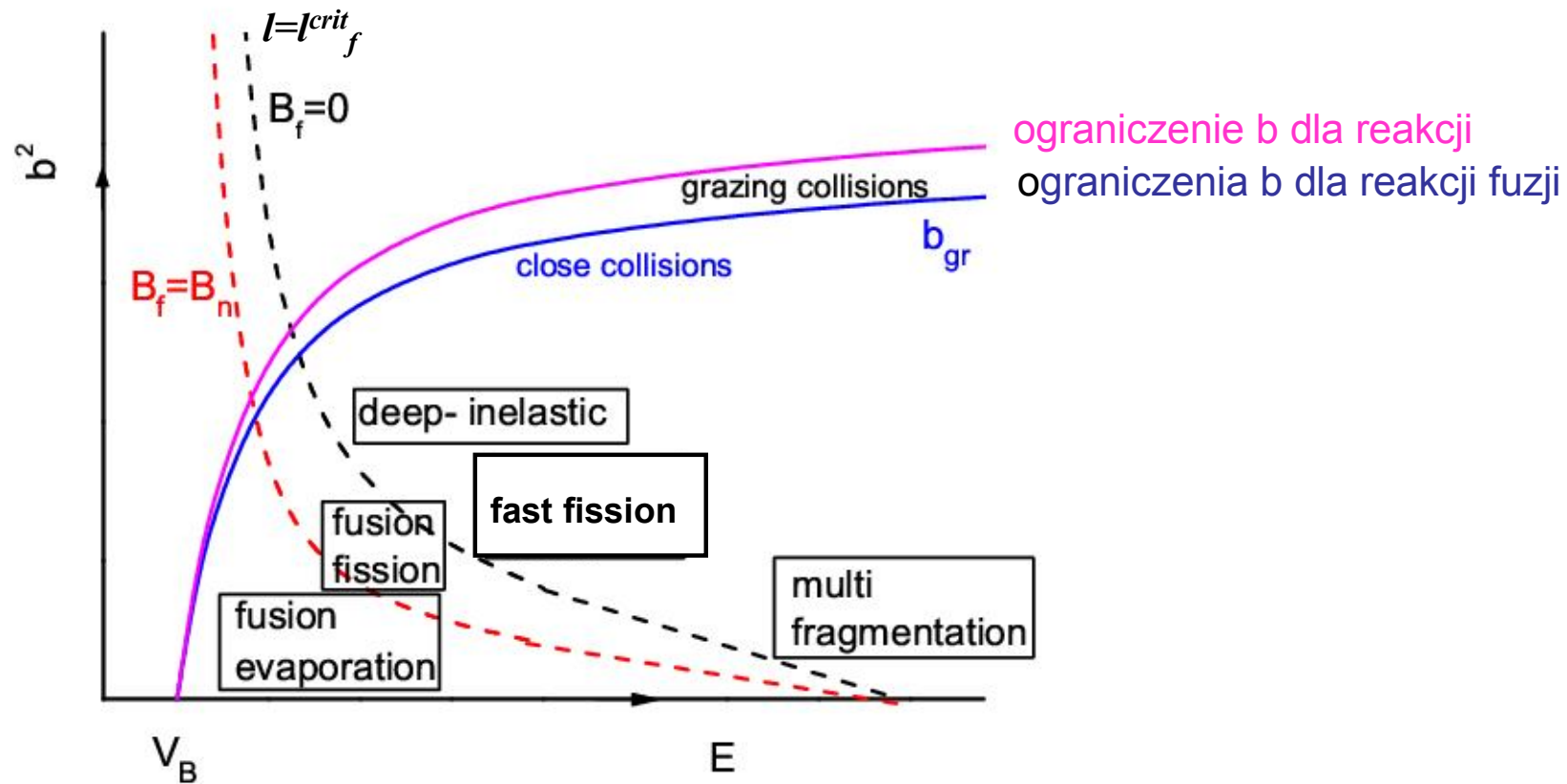
1. Energia kanału wejściowego w pobliżu średniej bariery.
2. Niezbyt wysoka energia wzbudzenia.
3. Odpowiedni dobór układu w kanale wejściowym – jak największa asymetria masowa pocisk-tarcza



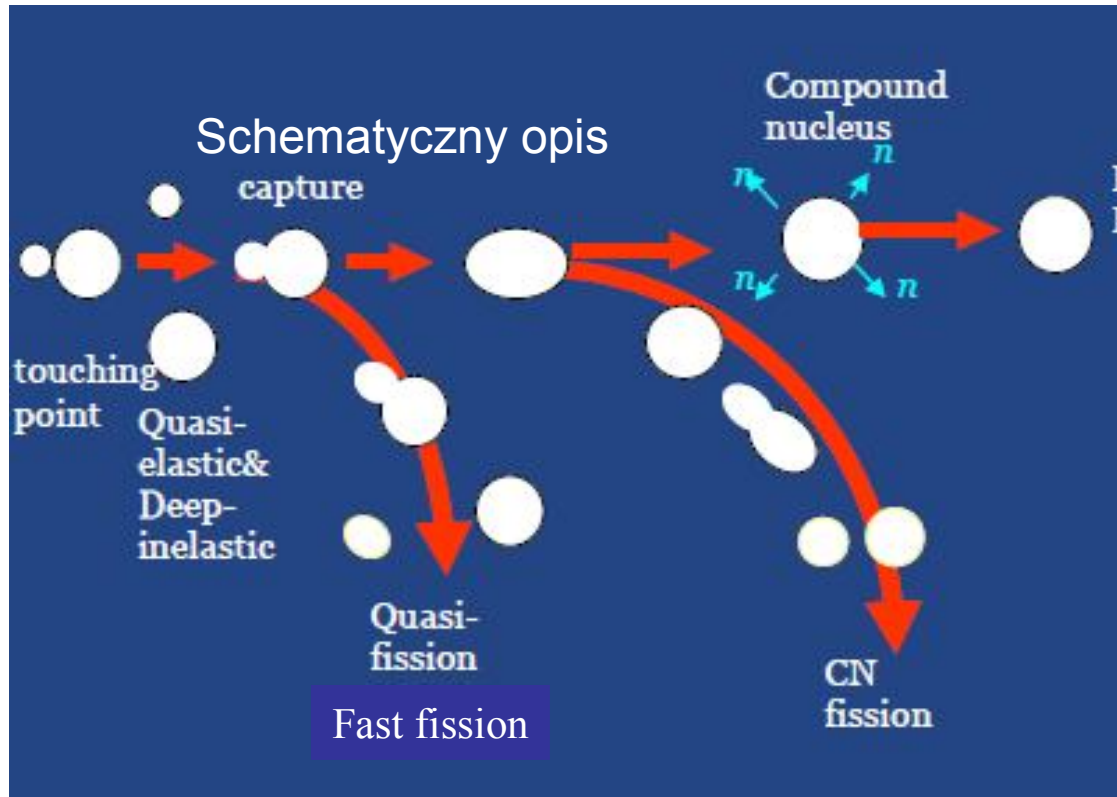
# Klasyfikacja reakcji według parametru zderzenia i energii w opisie klasycznym

$$b^2 = l^2/k^2 \propto l^2/E$$

Ciężkie układy



# Reakcje prowadzące do utworzenia jąder superciężkich

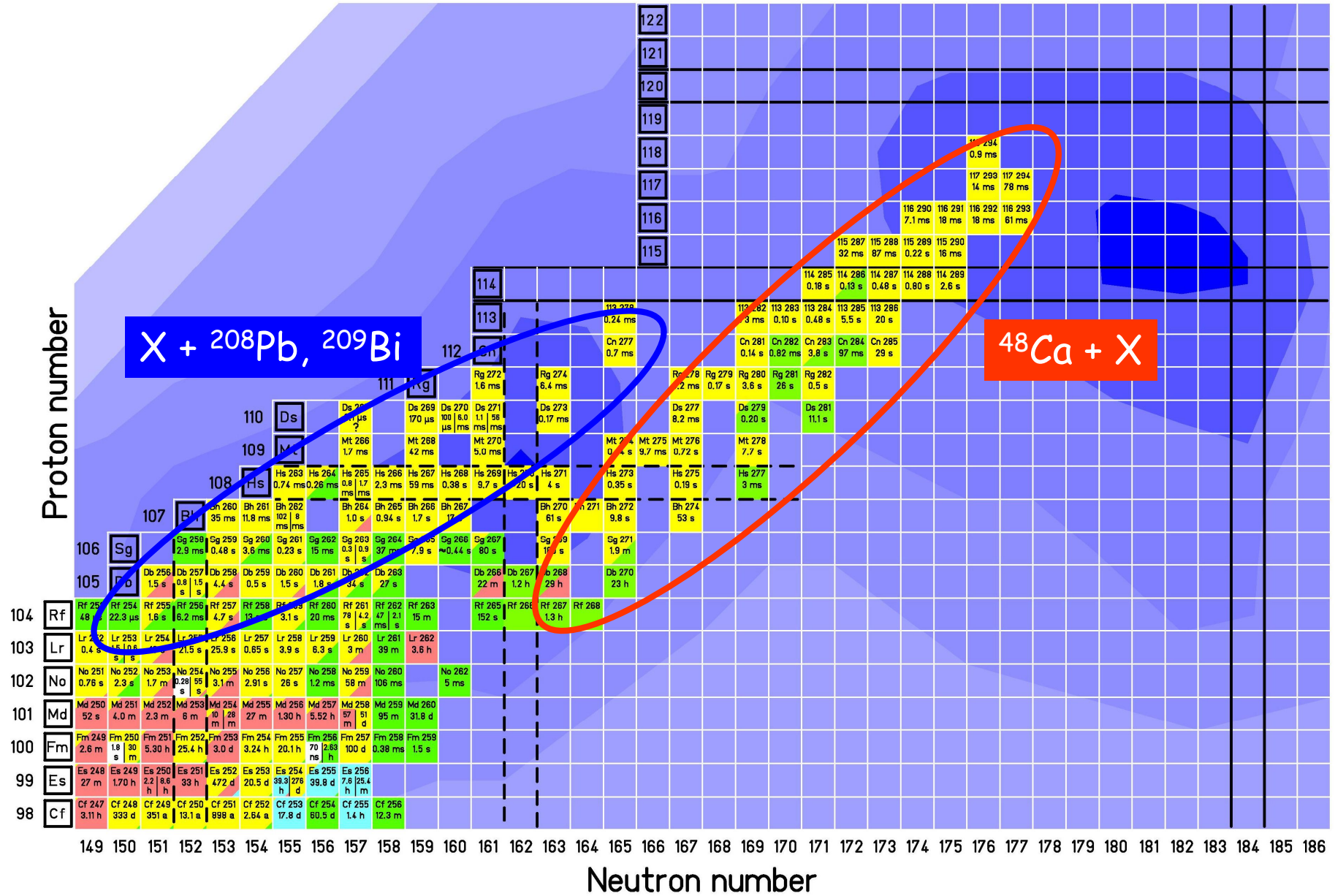


$$P_{CN}(E, l) \ll 1$$

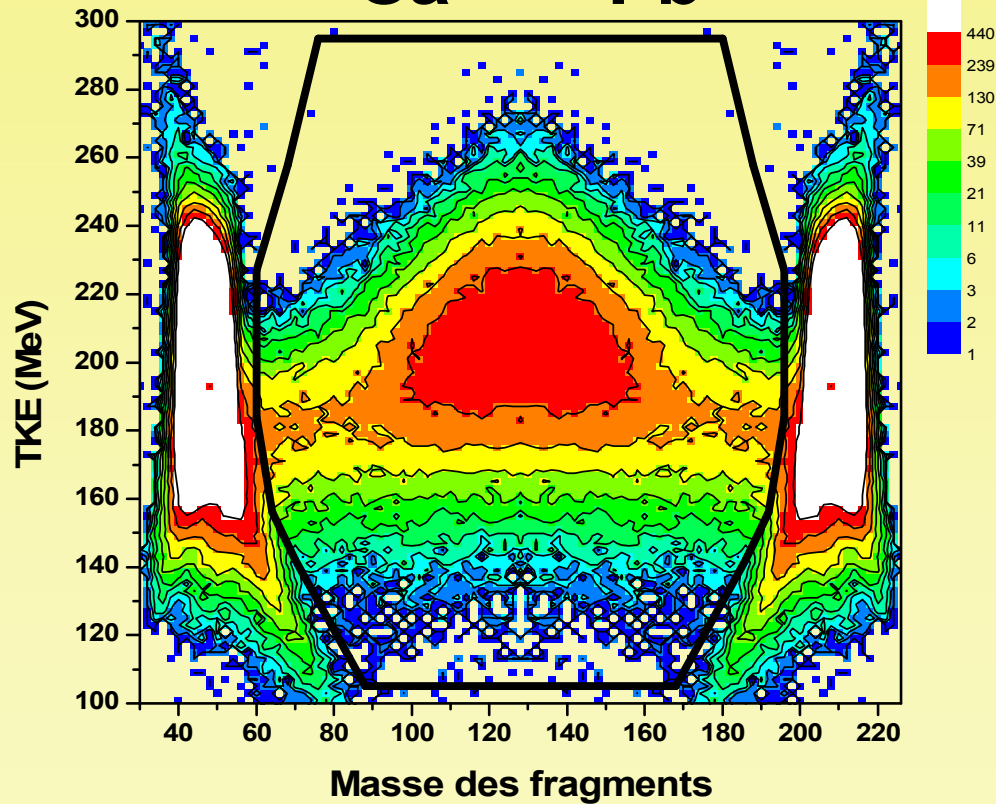
$$\sigma_{fus}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_l(E) P_{CN}(E, l) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) P_{CN}(E, l)$$

$$\sigma_{ER}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) P_{CN}(E, l) P_{SUR}(E, l)$$

# Jądra superciężkie



$^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$

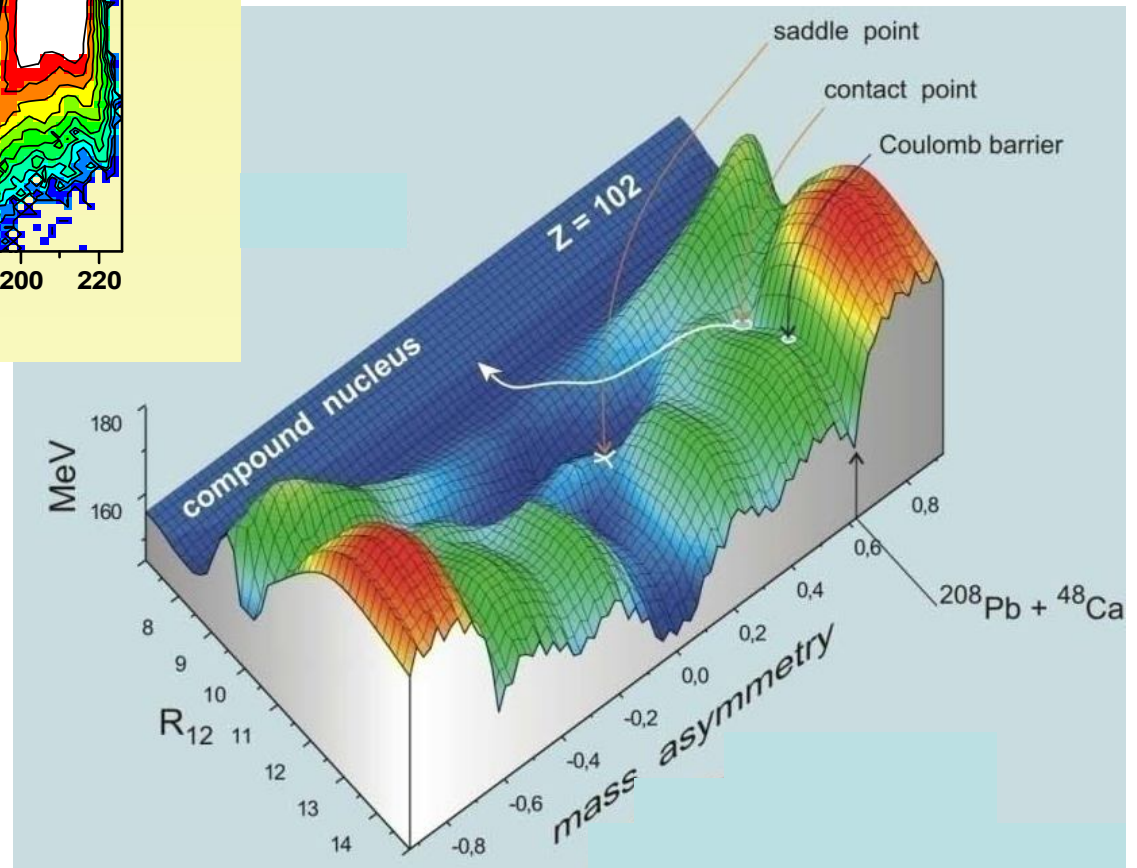


Obliczenia modelowe V. Zagrebaev

V. Zagrebaev and W. Greiner

J. Physics G34, 1 (2007)

Adiabatyczna powierzchnia energetyczna liczona „two center shell model”.



Eksperyment

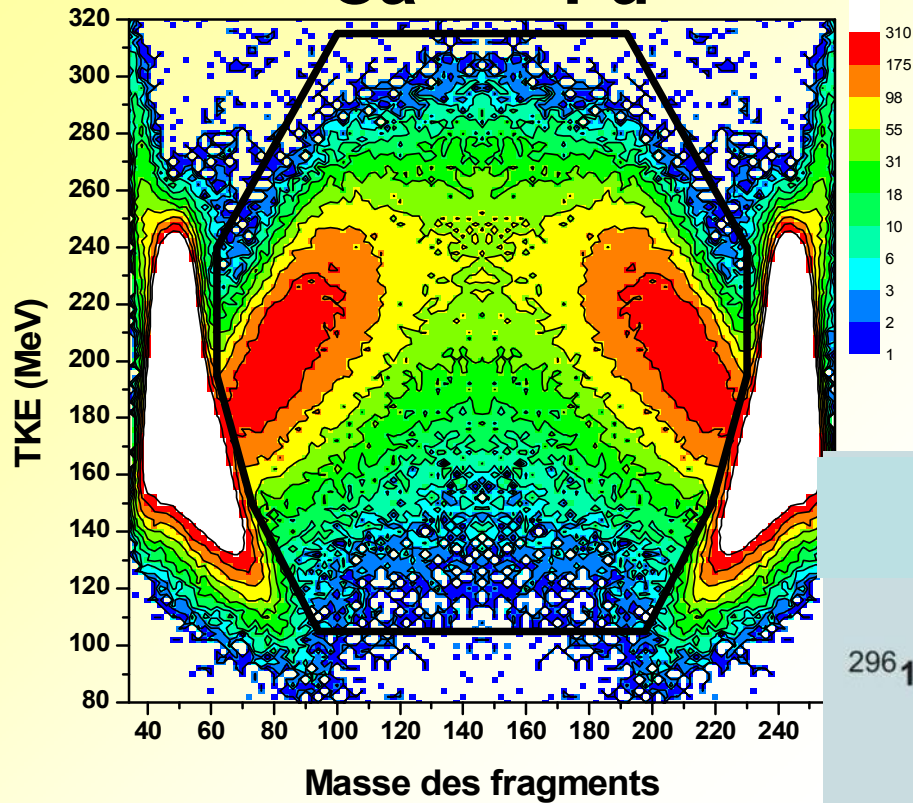
M. Itkis et al.

Fusion Dynamics at Extremes

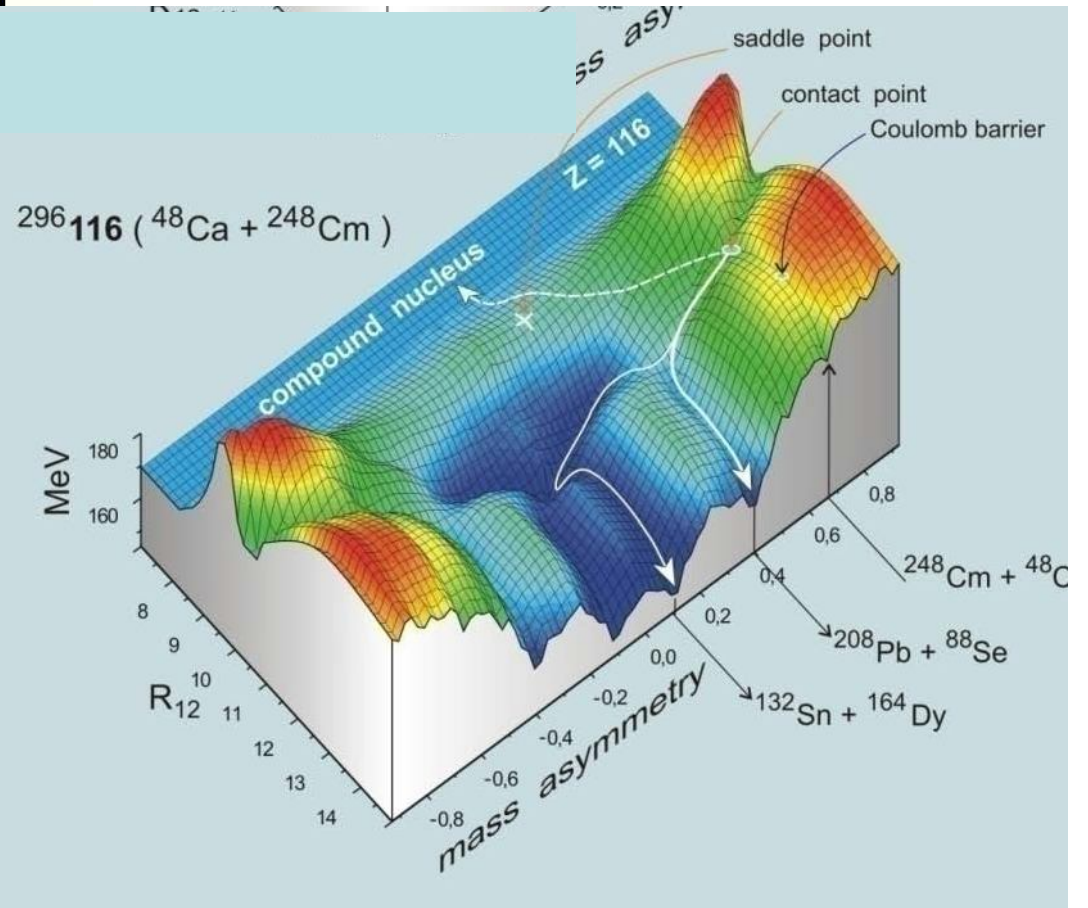
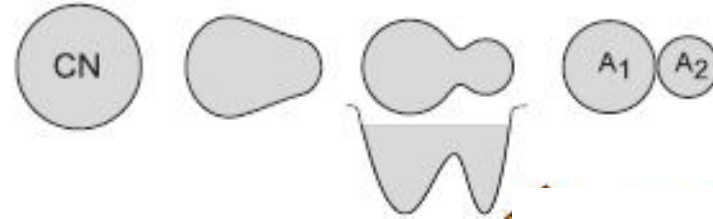
Dubna, 2000

T. Materna, PHD 2003 Strasbourg

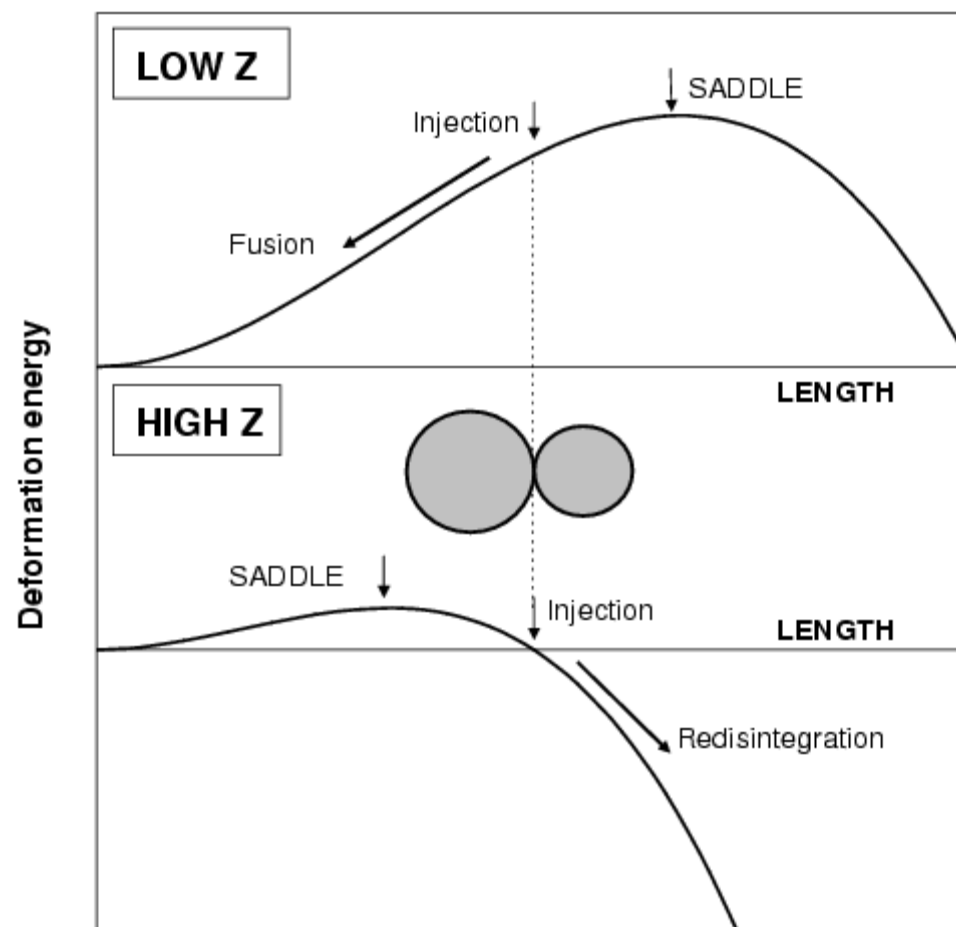
$^{48}\text{Ca} + ^{244}\text{Pu}$



- overlapped mean fields
- two-center shell model
- adiabatic potential energy

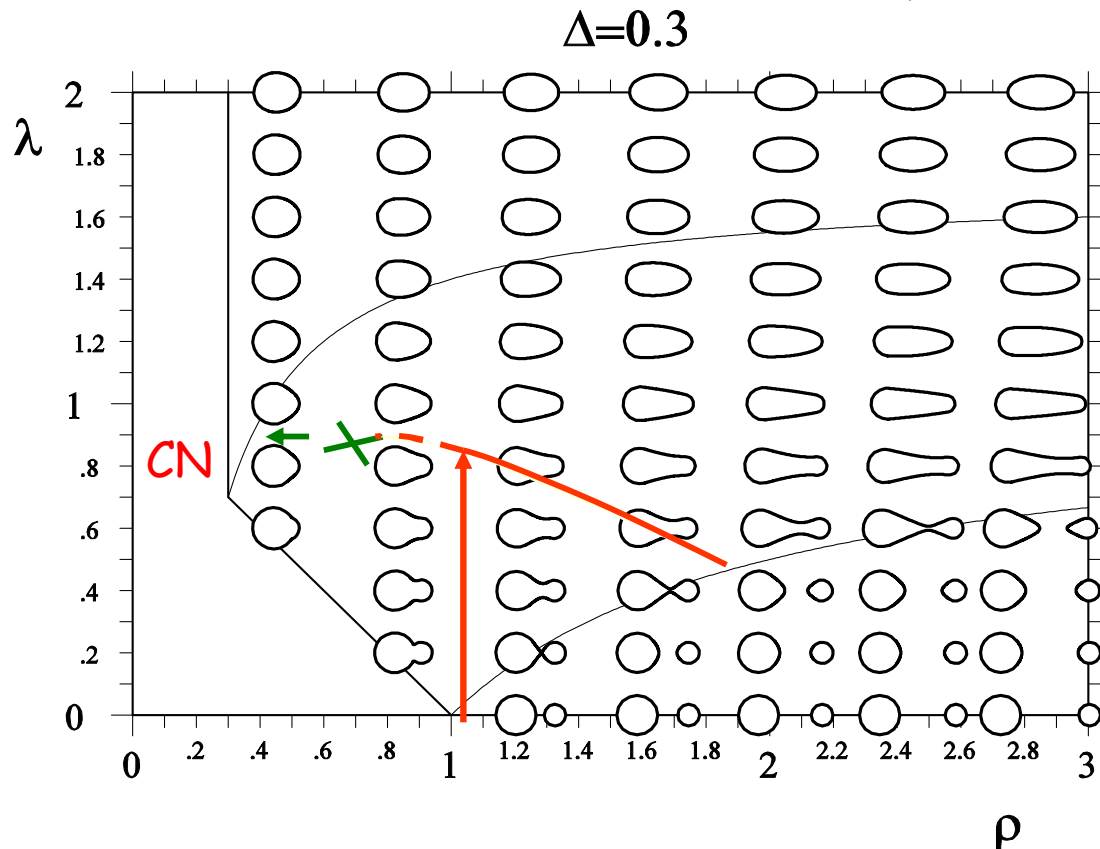


# Reakcje fuzji dla układów o różnych wartościach $Z_1Z_2$

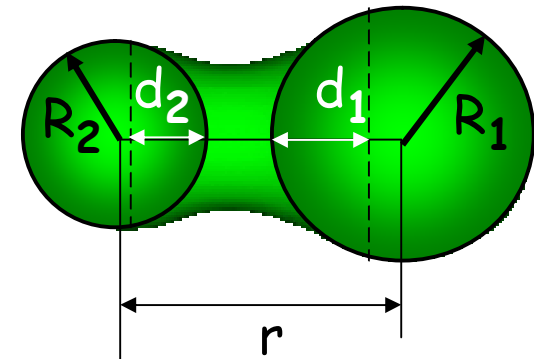


# $P_{CN}$ (fusion)

W.J. Świątecki, K. Siwek-Wilczyńska, J. Wilczyński  
 Acta Phys. Pol. B34 (2003)2049, IJMP E13 (2004) 261,  
 Phys.Rev.C71 (2005) 014602



J. Błocki, W. J. Świątecki, Nuclear  
 Deformation Energies, Report LBL  
 12811 (1982)



$\lambda = (d_1 + d_2) / (R_1 + R_2)$  - parametr charakteryzujący szyjkę

$\rho = r / (R_1 + R_2)$  - odległość środków kul

$\Delta = (R_1 - R_2) / (R_1 + R_2)$  - parametr asymetrii

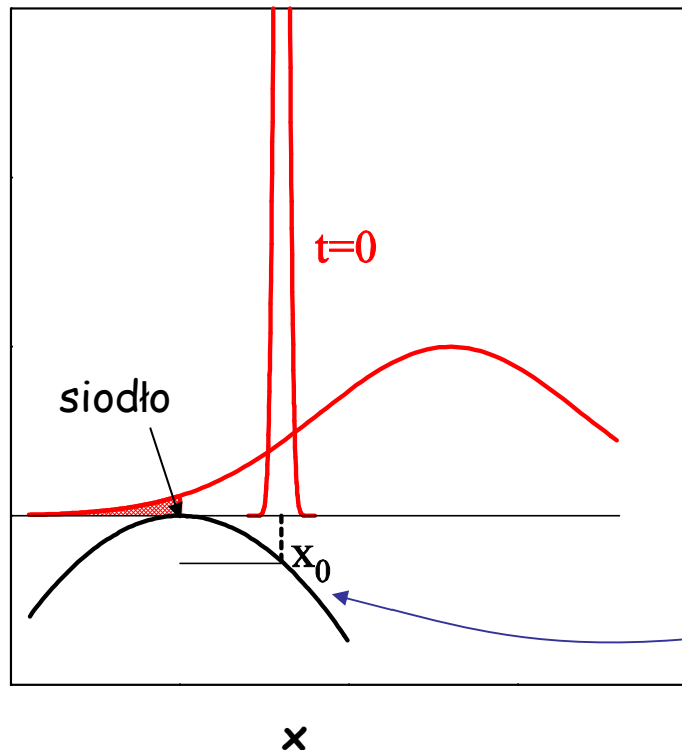
# Równanie dyfuzji Smoluchowskiego

$$\gamma \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [bxW(x,t)] + T \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,t)$$

współczynnik dyssypacji      dryf      dyfuzja

$W(x,t)$  - prawdopodobieństwo znalezienia układu w czasie  $t$  w pozycji  $x$

Dokładne rozwiązanie dla potencjału  $V(x) = -bx^2/2$  (odwrócona parabola) to rozkład Gaussa, który rozszerza się w czasie, zsuwając się w dół.



$P_{CN}(\text{fusion})$  – część rozkładu, która po czasie  $t \rightarrow \infty$  przeniknęła poza barierę.

$$P_{CN}(\text{fusion}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{erf} \sqrt{\frac{H(\ell)}{T}} \right) \quad H = \frac{bx_0^2}{2}$$

$x_0 \geq 0$  (punkt wstrzyknięcia)



Dla układów, w których  $P_{CN} < 1$

$$\sigma_{fus}(E) = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{\ell} (2\ell + 1) T_{\ell}(E) P_{CN}(E, \ell) = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell + 1) P_{CN}(E, \ell)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{cap}(E) = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell + 1) = \pi \hat{\lambda}^2 (\ell_{max} + 1)^2 \\ \sigma_{cap}(E) = \pi R_{\sigma}^2 \left[ X \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} X) + \exp(-X^2) \right] \frac{w}{E \sqrt{2\pi}} \quad X = \frac{E - B_0}{w \sqrt{2}}, \end{array} \right.$$

Z systematyki wyznaczamy  $R_{\sigma}$ ,  $B_0$  i  $w \rightarrow \sigma_{cap} \rightarrow \ell_{max}$

cold fusion  
reakcja 1n

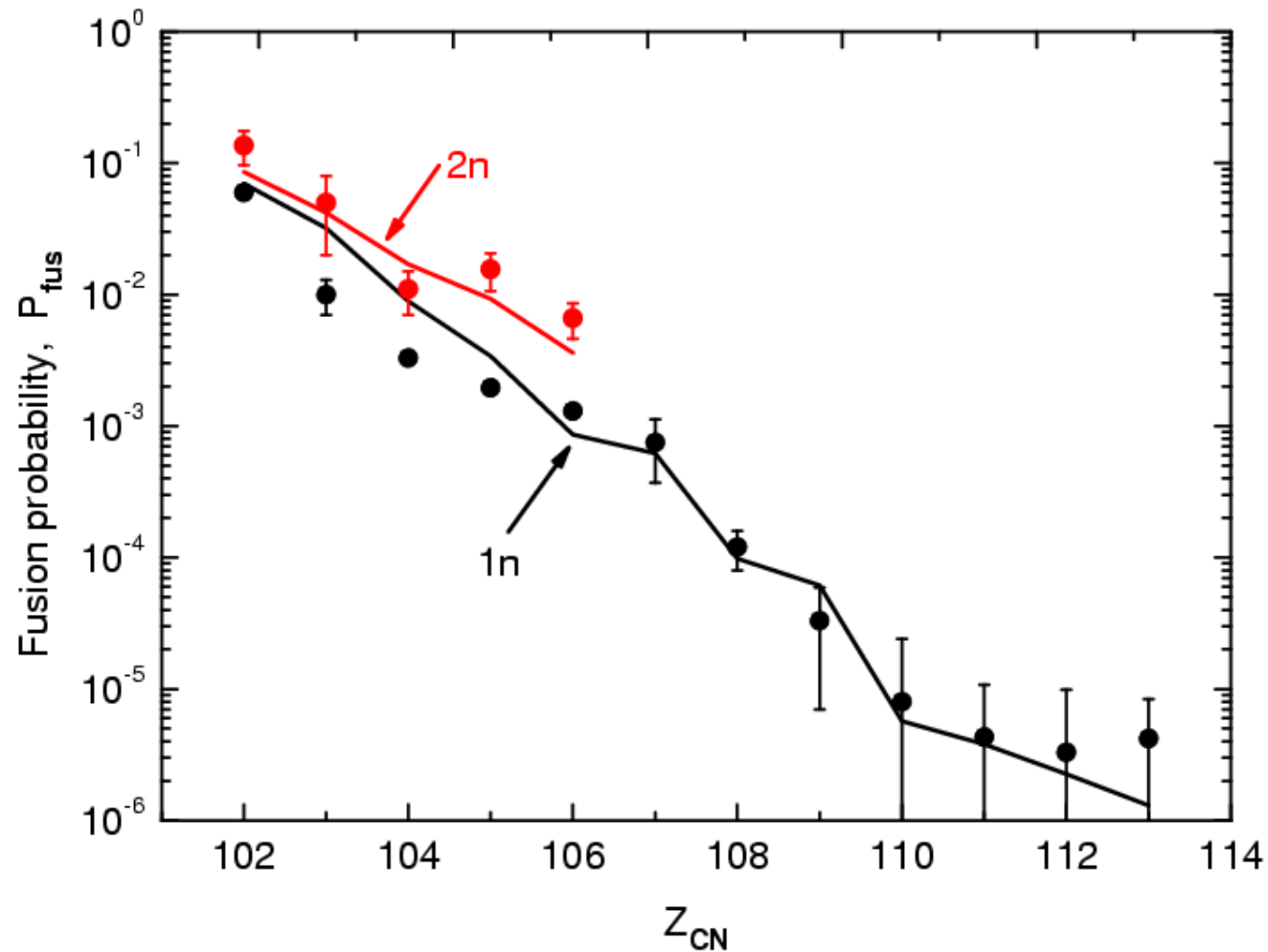
$$\sigma_n^{ER}(E, \ell) = \sigma_{fus}(E, \ell) \frac{\Gamma_n(E_{CN}^*, \ell)}{\Gamma_{tot}(E_{CN}^*, \ell)} P_n(E_Y^*, \ell)$$

hot fusion  
reakcja xn

$$\sigma_{xn}^{ER}(E, \ell) = \sigma_{fus}(E, \ell) \prod_{i=1}^x \frac{\Gamma_{in}(E_{iY}^*, \ell)}{\Gamma_{itot}(E_{iY}^*, \ell)} P_{in}(E_{iY}^*, \ell)$$

$P_n(E_Y^*, \ell)$  – prawdopodobieństwo, że energia wzbudzenia jądra końcowego jest za mała aby po emisji neutronu mógł nastąpić kolejny rozpad.

$\Gamma_{tot}$  – całkowita szerokość stanu o określonej energii i spinie



Linie ciągłe – obliczenia modelowe

Punkty – wyznaczone z danych z danych eksperymentalnych (modelowo zależne)

$$\sigma_{ER}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell + 1) P_{CN}(E, \ell) P_{SUR}(E, \ell)$$

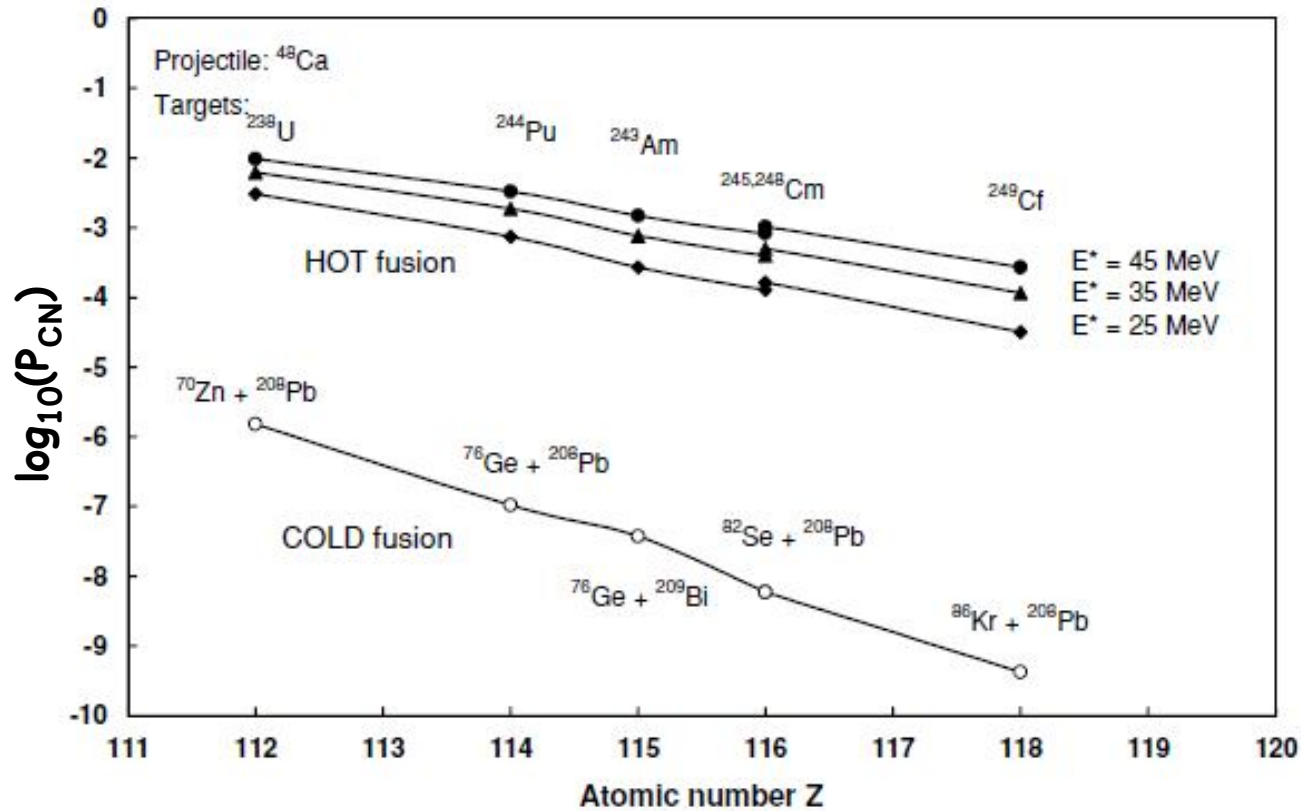
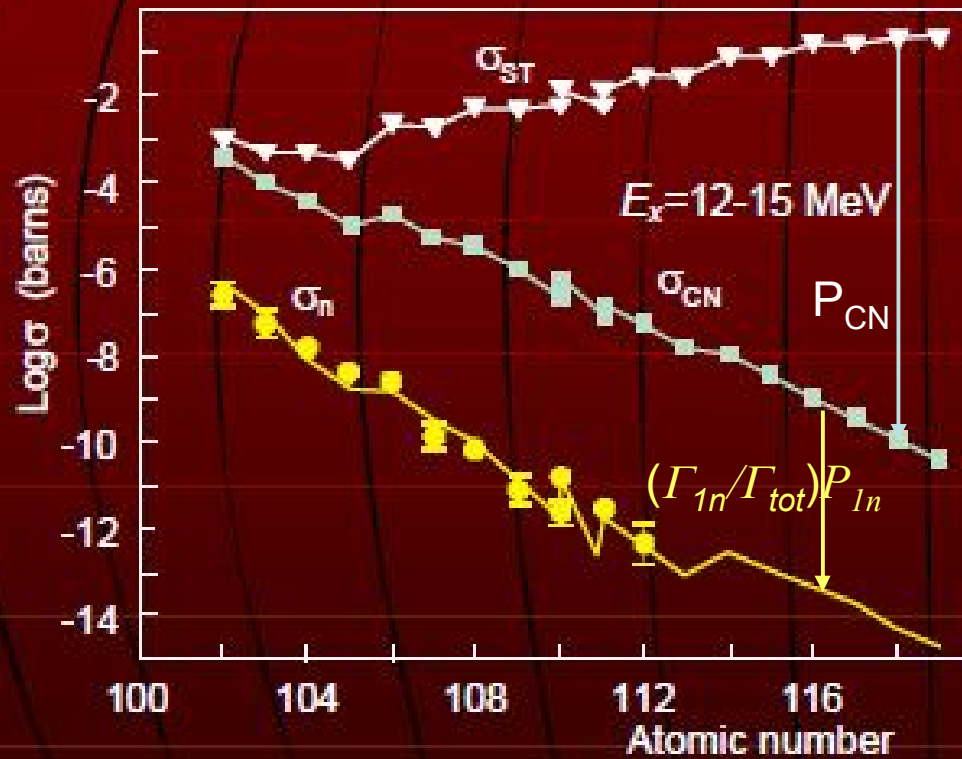


FIG. 22. The lowest curve shows the logarithms of the calculated hindrance factors in cold fusion reactions designed to make elements  $Z = 112$ – $118$ . (See Fig. 2.) The excitation energies are typically 13–14 MeV. The upper curves show the hindrance factors when the same elements are made in hot fusion reactions at excitation energies of 25, 35, and 45 MeV. The hindrances are now less by 4 to 5 orders of magnitude.

$$\sigma_{ER}(E) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell + 1) P_{CN}(E, \ell) P_{SUR}(E, \ell)$$

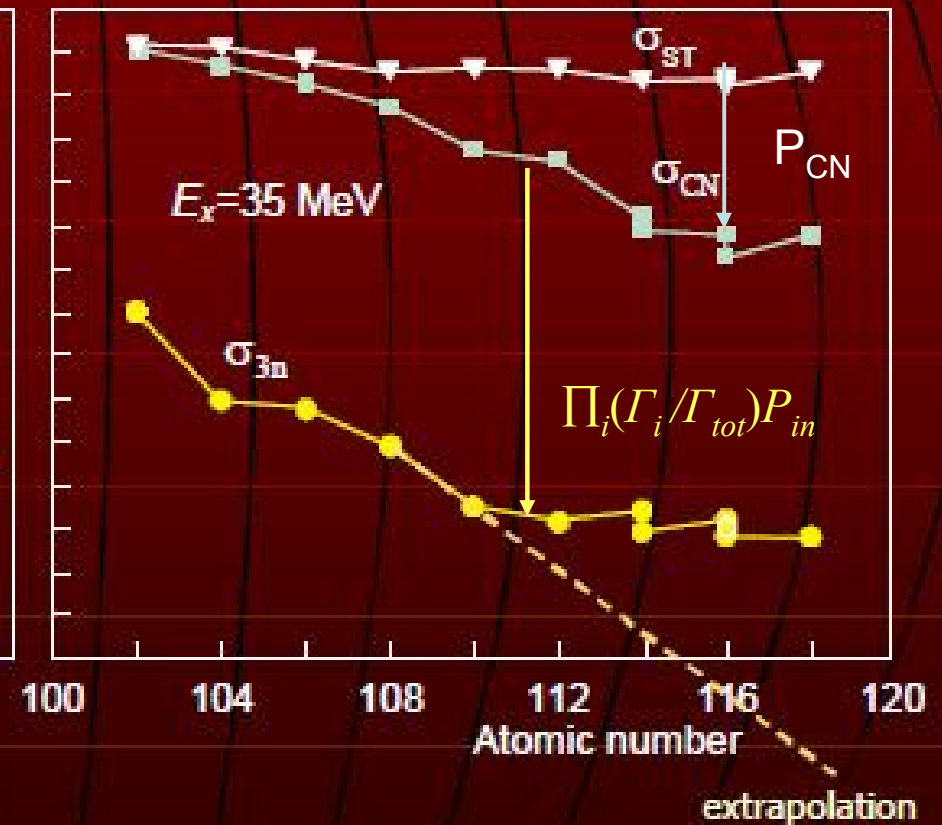
### Cold fusion

*W.J. Swiatecki, K. Siwak-Wilczynska and J. Wilczynski  
Journ. Mod. Phys. E (2003)*

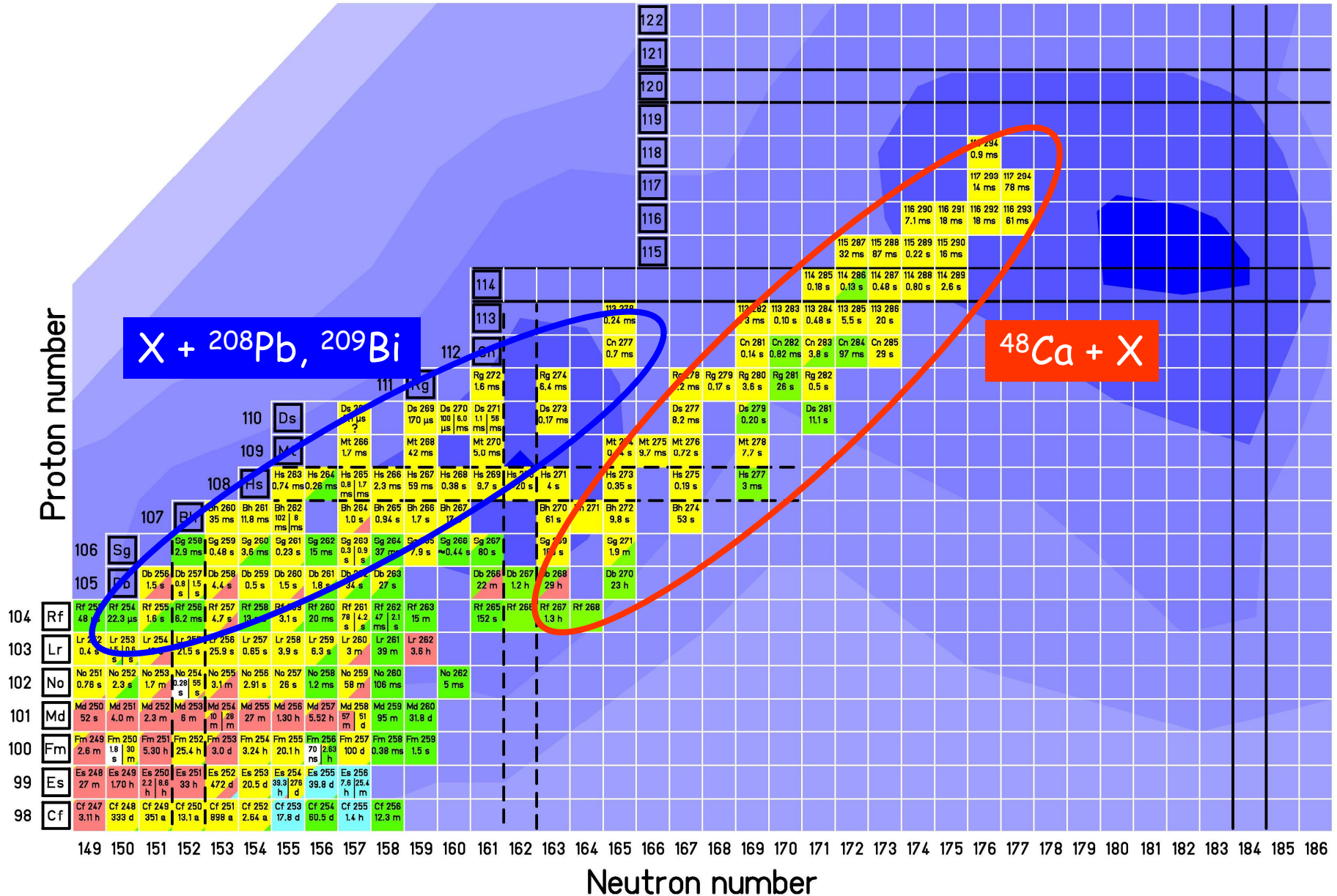


### Hot fusion with $^{48}\text{Ca}$

*V.I. Zagrebaev, M.G. Itkis and Yu. Ts. Oganessian  
Yad. Fiz., 66 (2003)*



# Metody eksperymentalne wytwarzania i identyfikacji jąder superciężkich



Z=104 (odkryte w Dubnej)

$^{208}\text{Pb}(^{48}\text{Ti},n)^{255}\text{Rf}$  LBNL

$^{208}\text{Pb}(^{50}\text{Ti},n)^{257}\text{Rf}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{50}\text{Ti},n)^{257}\text{Rf}$  LBNL

Z=105 (odkryte w Dubnej)

$^{209}\text{Bi}(^{50}\text{Ti},n)^{258}\text{Db}$  GSI

$^{209}\text{Bi}(^{50}\text{Ti},n)^{258}\text{Db}$  LBNL

$^{208}\text{Pb}(^{51}\text{V},n)^{258}\text{Db}$  LBNL

Z=106

$^{208}\text{Pb}(^{54}\text{Cr},n)^{261}\text{Sg}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{52}\text{Cr},n)^{259}\text{Sg}$  LBNL

Z=107

$^{209}\text{Bi}(^{54}\text{Cr},n)^{262}\text{Bh}$  GSI

$^{209}\text{Bi}(^{54}\text{Cr},n)^{262}\text{Bh}$  LBNL

$^{209}\text{Bi}(^{52}\text{Cr},n)^{260}\text{Bh}$  LBNL

$^{208}\text{Pb}(^{55}\text{Mn},n)^{262}\text{Bh}$  LBNL

Z=108

$^{208}\text{Pb}(^{58}\text{Fe},n)^{265}\text{Hs}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{56}\text{Fe},n)^{263}\text{Hs}$  LBNL

Z=109

$^{209}\text{Bi}(^{58}\text{Fe},n)^{266}\text{Mt}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{59}\text{Co},n)^{266}\text{Mt}$  LBNL

Z=110

$^{208}\text{Pb}(^{64}\text{Ni},n)^{271}\text{Ds}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{64}\text{Ni},n)^{271}\text{Ds}$  LBNL

$^{208}\text{Pb}(^{64}\text{Ni},n)^{271}\text{Ds}$  RIKEN

$^{207}\text{Pb}(^{64}\text{Ni},n)^{270}\text{Ds}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{62}\text{Ni},n)^{269}\text{Ds}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{64}\text{Ni},n)^{271}\text{Ds}$  Lanzhou

Z=111

$^{209}\text{Bi}(^{64}\text{Ni},n)^{272}\text{Rg}$  GSI

$^{209}\text{Bi}(^{64}\text{Ni},n)^{272}\text{Rg}$  RIKEN

$^{208}\text{Pb}(^{65}\text{Cu},n)^{272}\text{Rg}$  LBNL

Z=112

$^{208}\text{Pb}(^{70}\text{Zn},n)^{277}\text{Cn}$  GSI

$^{208}\text{Pb}(^{70}\text{Zn},n)^{277}\text{Cn}$  RIKEN

Z=113

$^{209}\text{Bi}(^{70}\text{Zn},n)^{278}\text{113}$  RIKEN

cold fusion

$102 \leq Z \leq 113$

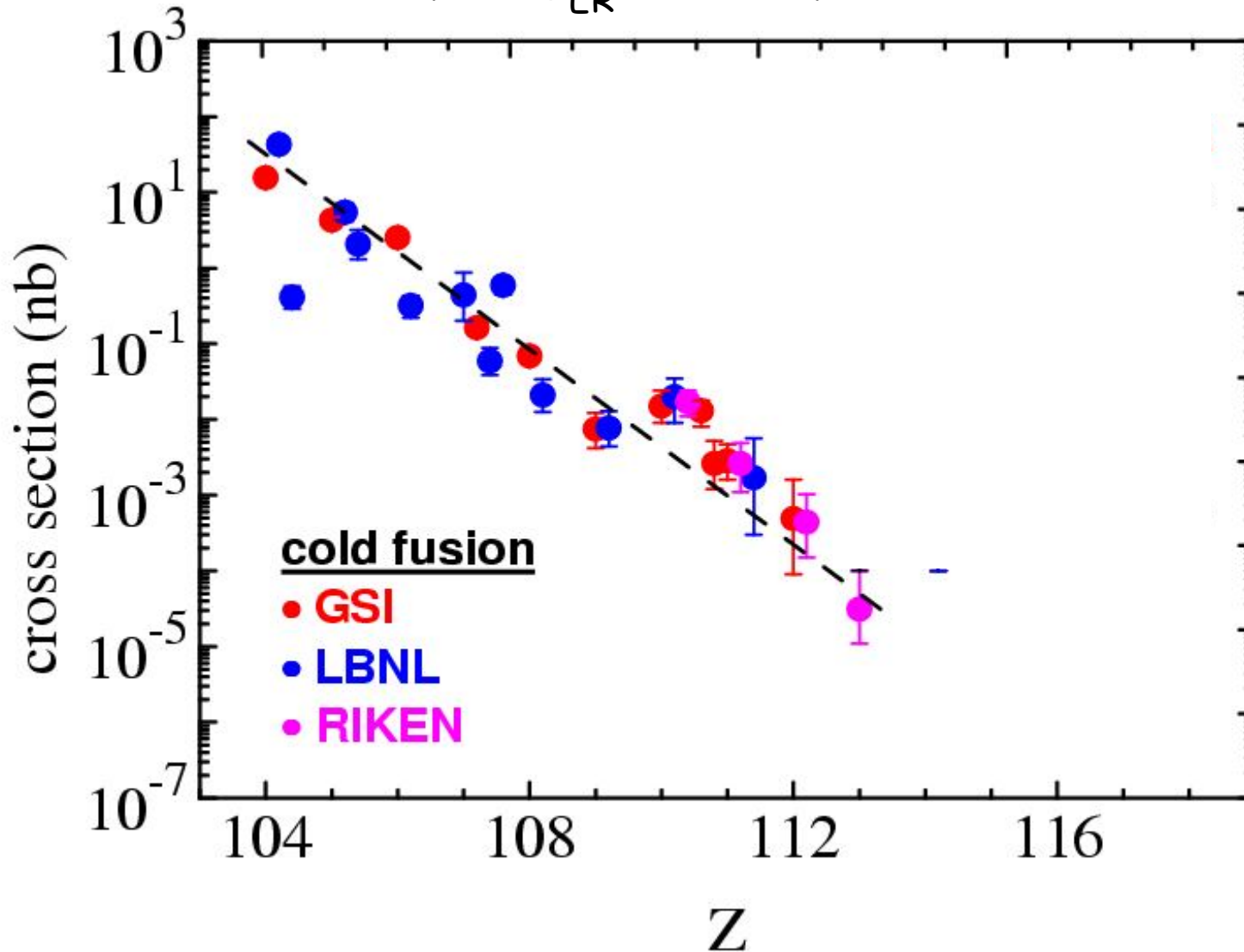
tarcza:  $^{208}\text{Pb}$  lub  $^{209}\text{Bi}$

pocisk:  $^{48}\text{Ti}$ ..... $^{70}\text{Zn}$

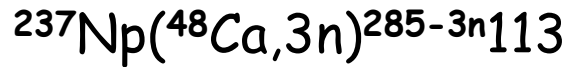
$E_{\text{CN}}^* = 10 - 20 \text{ MeV}$

reakcje  $1n$

$10^2 \text{ nb} < \sigma_{\text{ER}} < 10^{-5} \text{ nb}$



Z=113



Dubna

Z=114



Dubna



LBNL

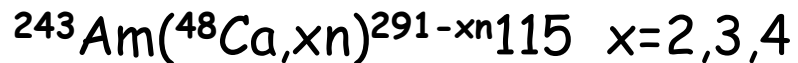


Dubna



GSI

Z=115

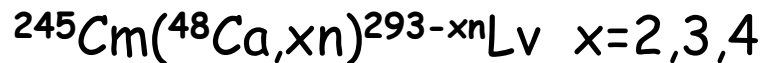


Dubna

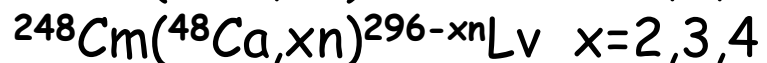


GSI

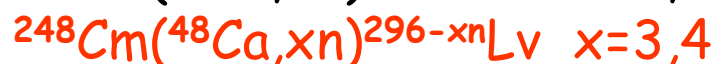
Z=116



Dubna

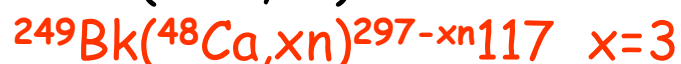
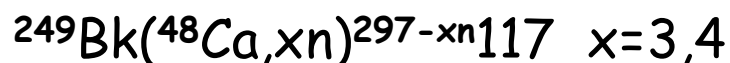


Dubna

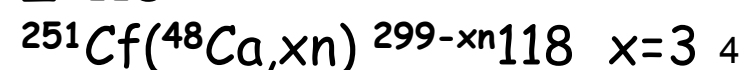


GSI

Z=117



Z=118





hot fusion

$112 \leq Z \leq 118$

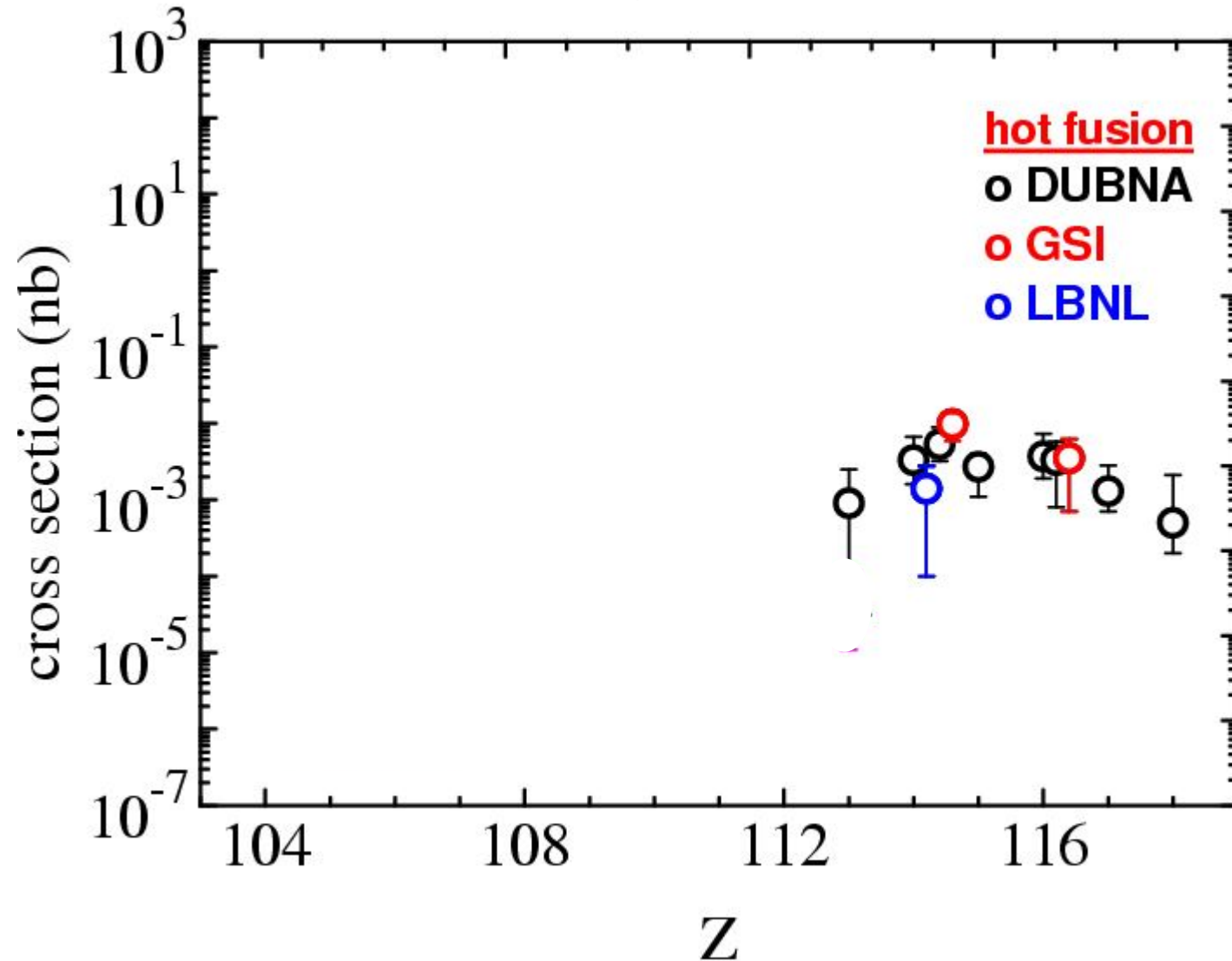
tarcza: aktynowce

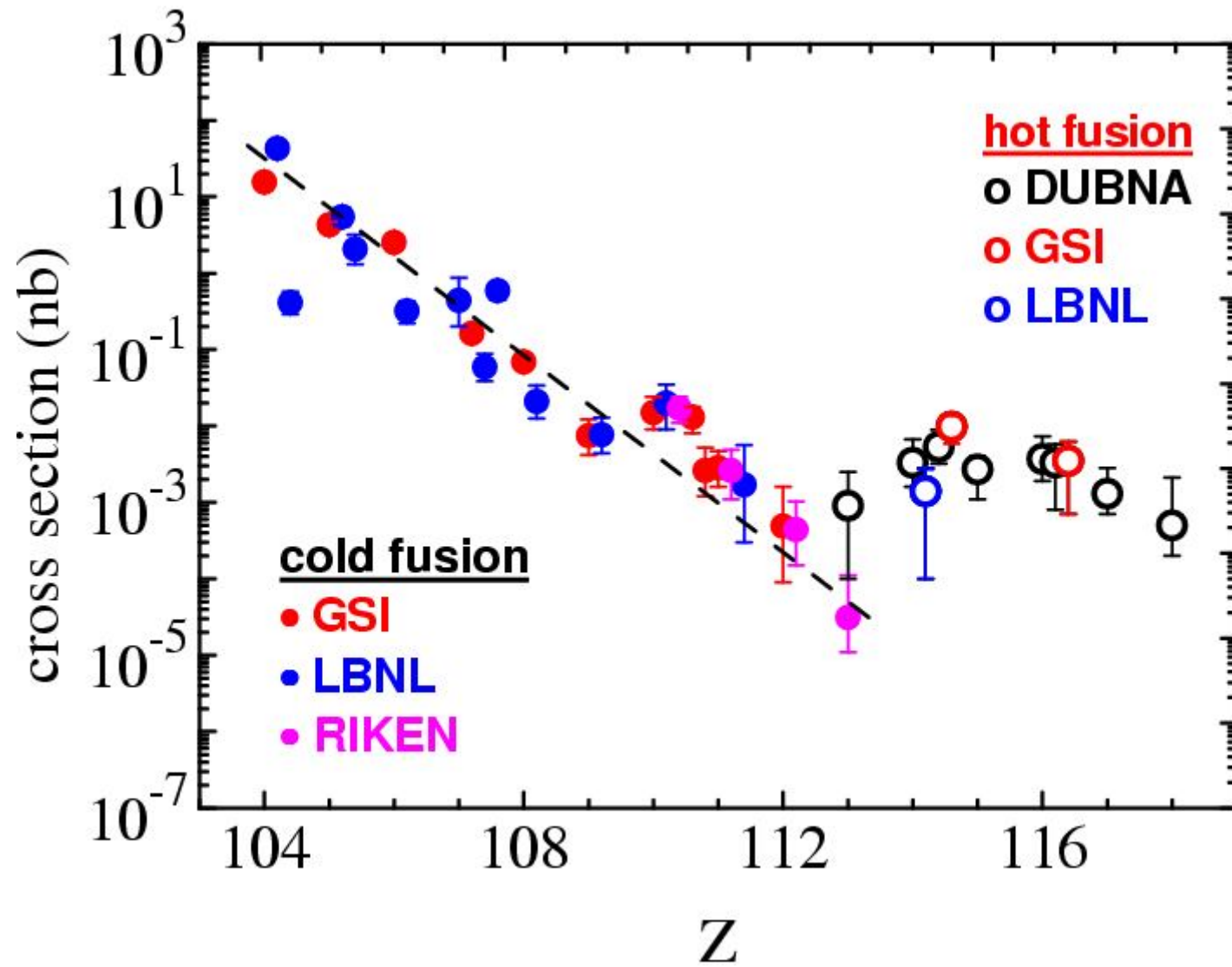
pocisk:  $^{48}\text{Ca}$

$E_{\text{CN}}^* = 30 - 40 \text{ MeV}$

reakcje 2n,3n,4n

$10^{-4} \text{ nb} < \sigma_{\text{ER}} < 10^{-2} \text{ nb}$

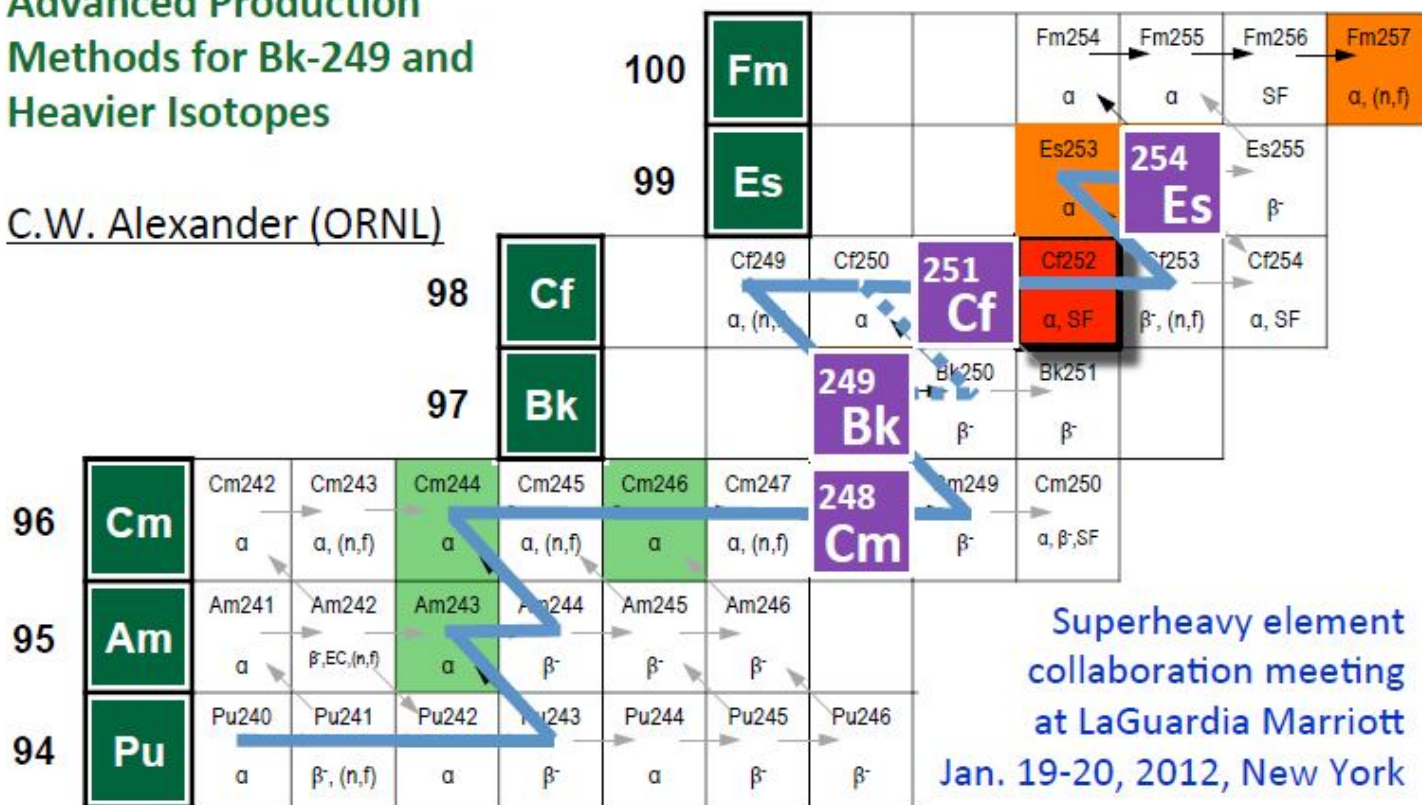




## Transuranium Nuclide Production Paths

### Advanced Production Methods for Bk-249 and Heavier Isotopes

C.W. Alexander (ORNL)



Superheavy element  
collaboration meeting  
at LaGuardia Marriott  
Jan. 19-20, 2012, New York

22 mg of  $^{249}\text{Bk}$ ,  $\approx$  1 M\$, 1 year at HIFR ORNL High Flux Isotope Reactor



$\text{Bk}(\text{NO}_3)_3$  Product

Produkowany z mieszaniny  $^{244-248}\text{Cm}$ . Naświetlanie neutronami. Przy całkowitym odcięciu neutronów termicznych z 1.0 g  $^{248}\text{Cm}$  w 7 cyklach reaktora (1 cykl 23 dni) można otrzymać 82.8 mg  $^{249}\text{Bk}$

Reaction:



$T_{1/2}=320\text{d}$

high neutron flux  
HIFR, ORNL

chemical separation  
from  ${}^{252}\text{Cf}$  (factor  $>10^8$ )

target preparation  $36\text{cm}^2$   
 $0.25\ \mu\text{m BkO}_2 + 1.6\ \mu\text{mTi}$

RIAR, Dimitrovgrad, Russia

high intensity of  ${}^{48}\text{Ca}$   
beam ( $\sim 1.5\ \mu\text{A}$ )  
beam dose  $\geq 3 \cdot 10^{19}$

U-400 FLNR, JINR

Separation, Detection & Identification  
 $1\ \text{SH-atom} / 10^{12}$  reaction products

DGFRS

Dubna Gas-filled Recoil Separator



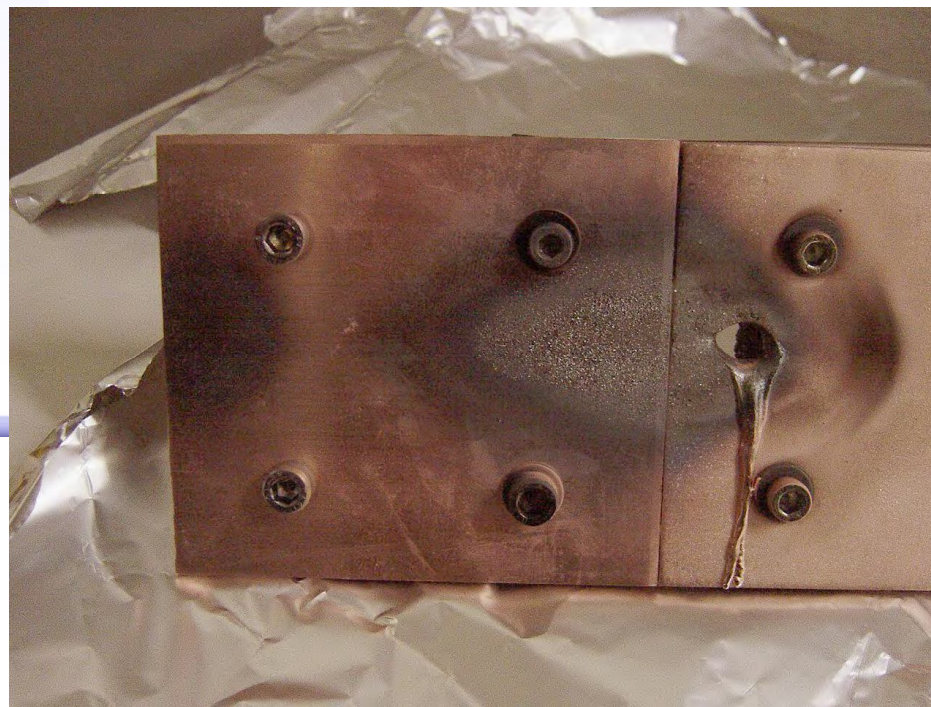
Tarcza





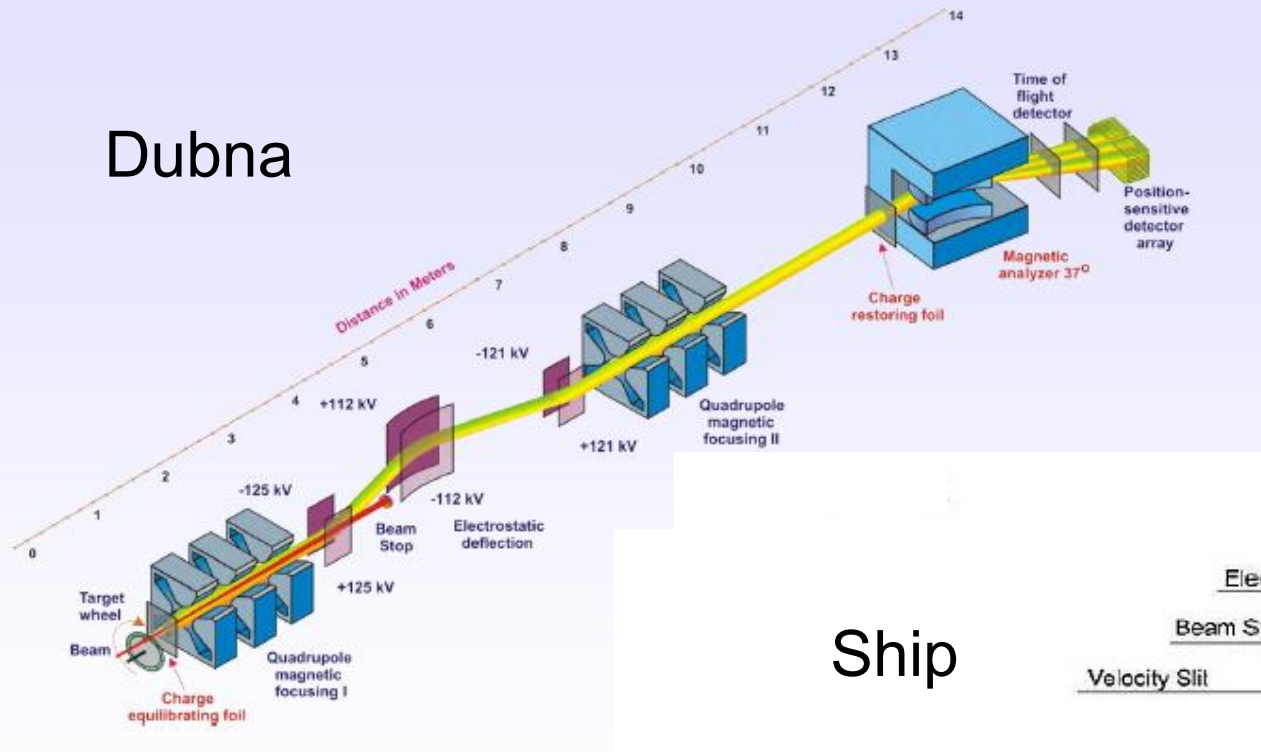
Tarcza i kręcąca  
się przestona

Bardzo intensywna wiązka



# Electrostatic separator "VASSILISSA"

Dubna



## Układ pomiarowy

Prąd wiązki  $1\mu\text{A}$

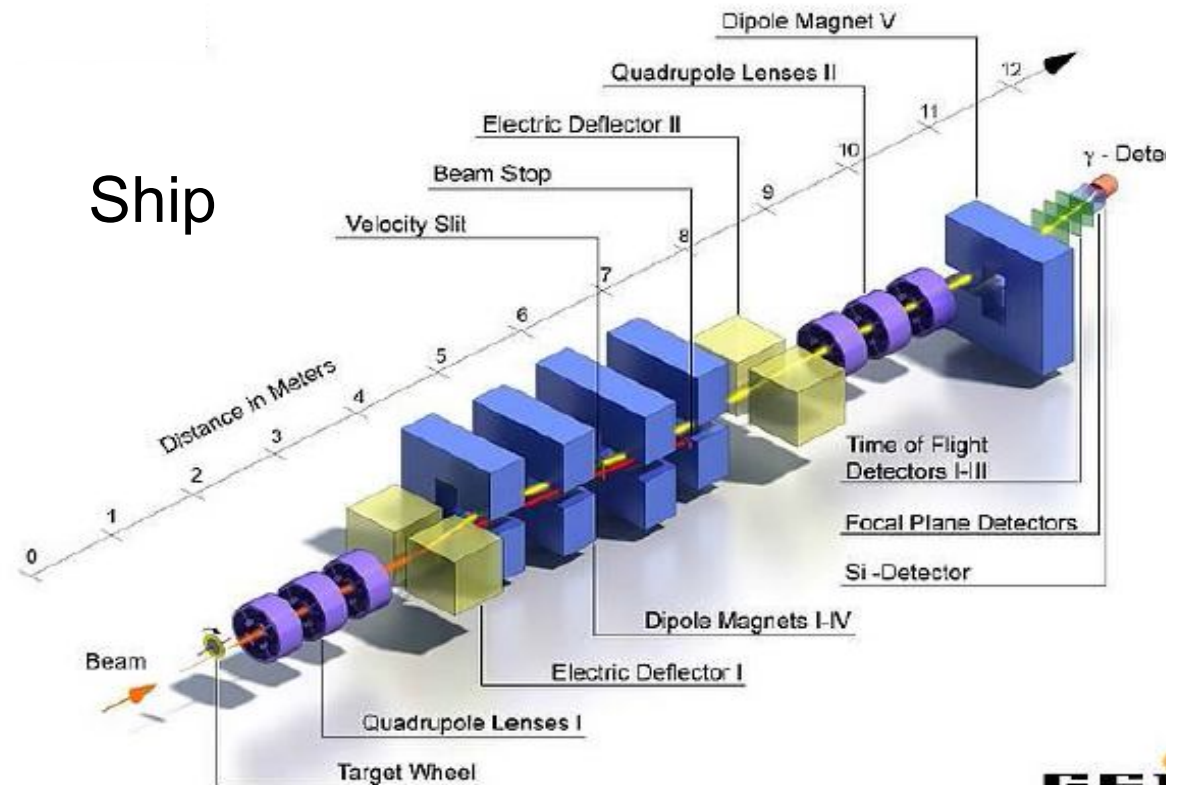
Częstość obrotów  $\approx 20$  obr/s

Długość (tarcza-detektor) – 11 m

Czas przelotu  $2\mu\text{s}$

Oczyszczenie wiązki  $10^{-10}$

Ship



Filtr prędkości  
prostopadłe pole E i B

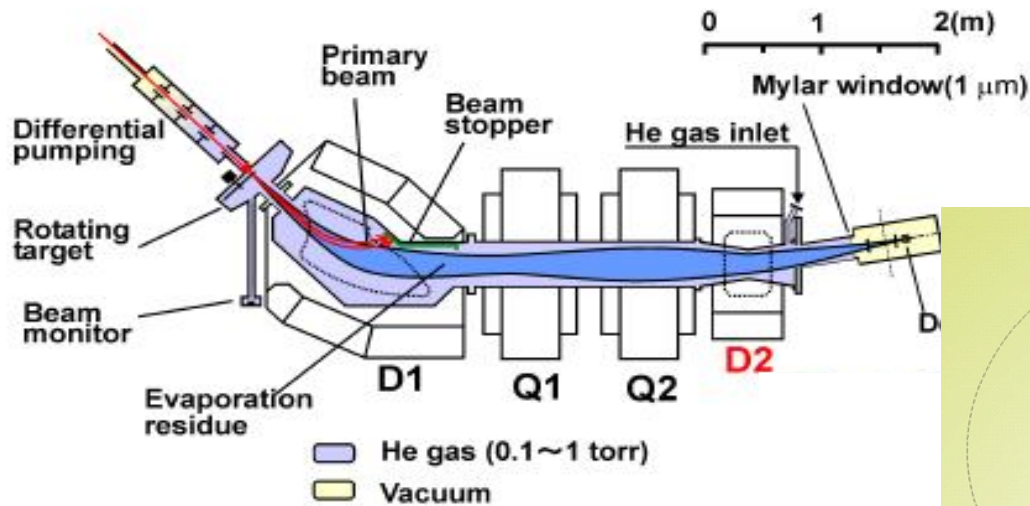
$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{v} \perp \vec{B}$$

$$F=0 \text{ dla } E = -vB$$



# RIKEN GARIS(Gas-filled Recoil Ion Separator)

# Separatory gazowe



K. Morita et al. J. Phys. Soc. Jpn. 73, 2573 (2004)

Przy odpowiednim dobraniu natężenia pola magnetycznego i ciśnienia gazu uzyskujemy efekt ogniskowania EVR.

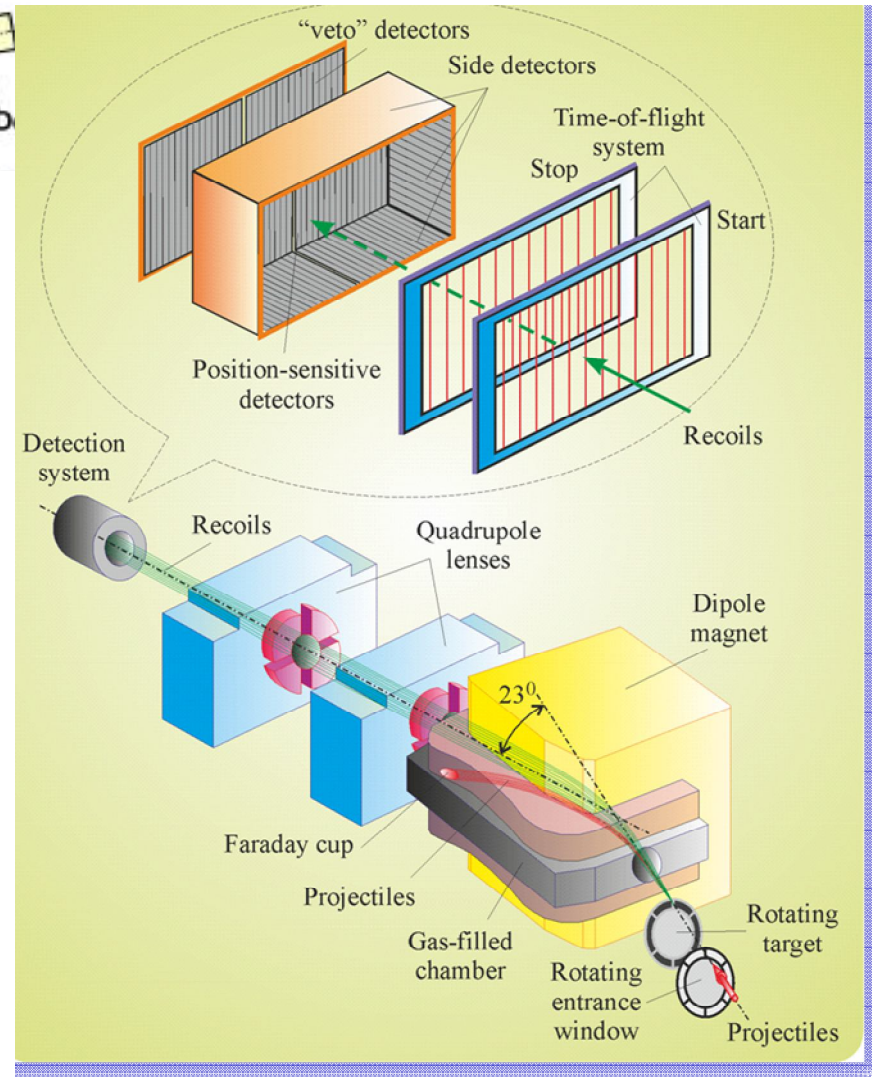
## Dubna Gas filled Recoil Separator

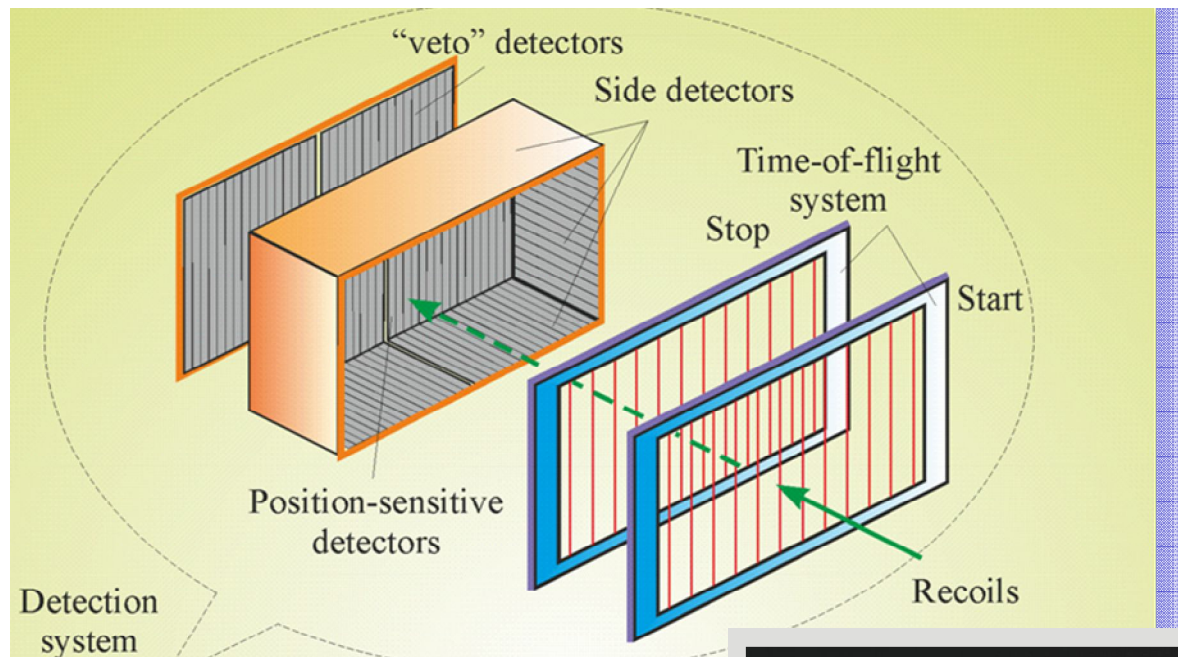
Transmisja:

EVR – 35% - 40%

Target-like  $10^{-4}$  -  $10^{-7}$

Projectile-like  $10^{-15}$  -  $10^{-17}$





## Układ detekcyjny

Wydajność rejestracji

Cząstki  $\alpha$  - 87%

Fragmenty rozszczepienia

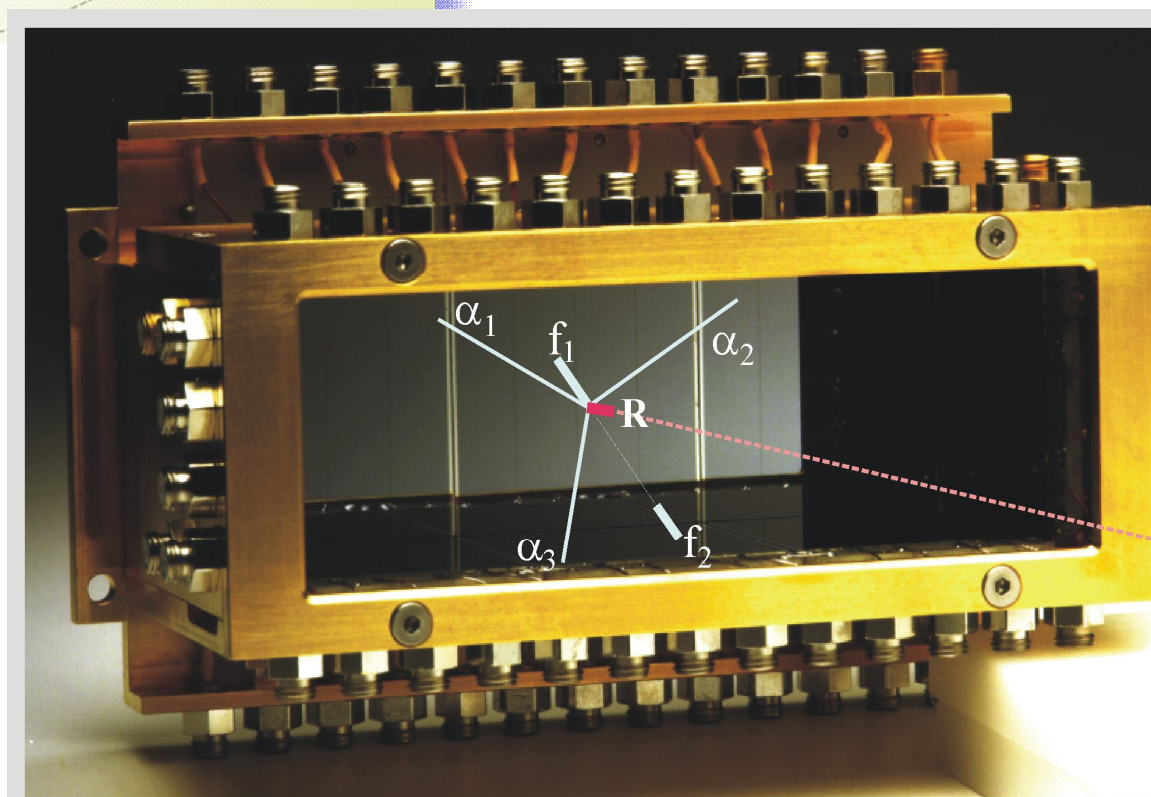
jeden fragment - 100%

2 fragmenty  $\approx$  40%

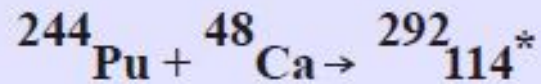
**pomiar:**

**start** – jądro CR trafia w detektor, **pozycja i energia**

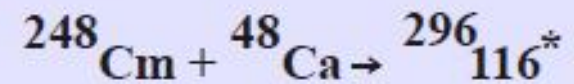
**czas, pozycja i energia** kolejnych rozpadów. Możliwość rozróżnienia cząstki  $\alpha$  i fragmentu rozszczepienia



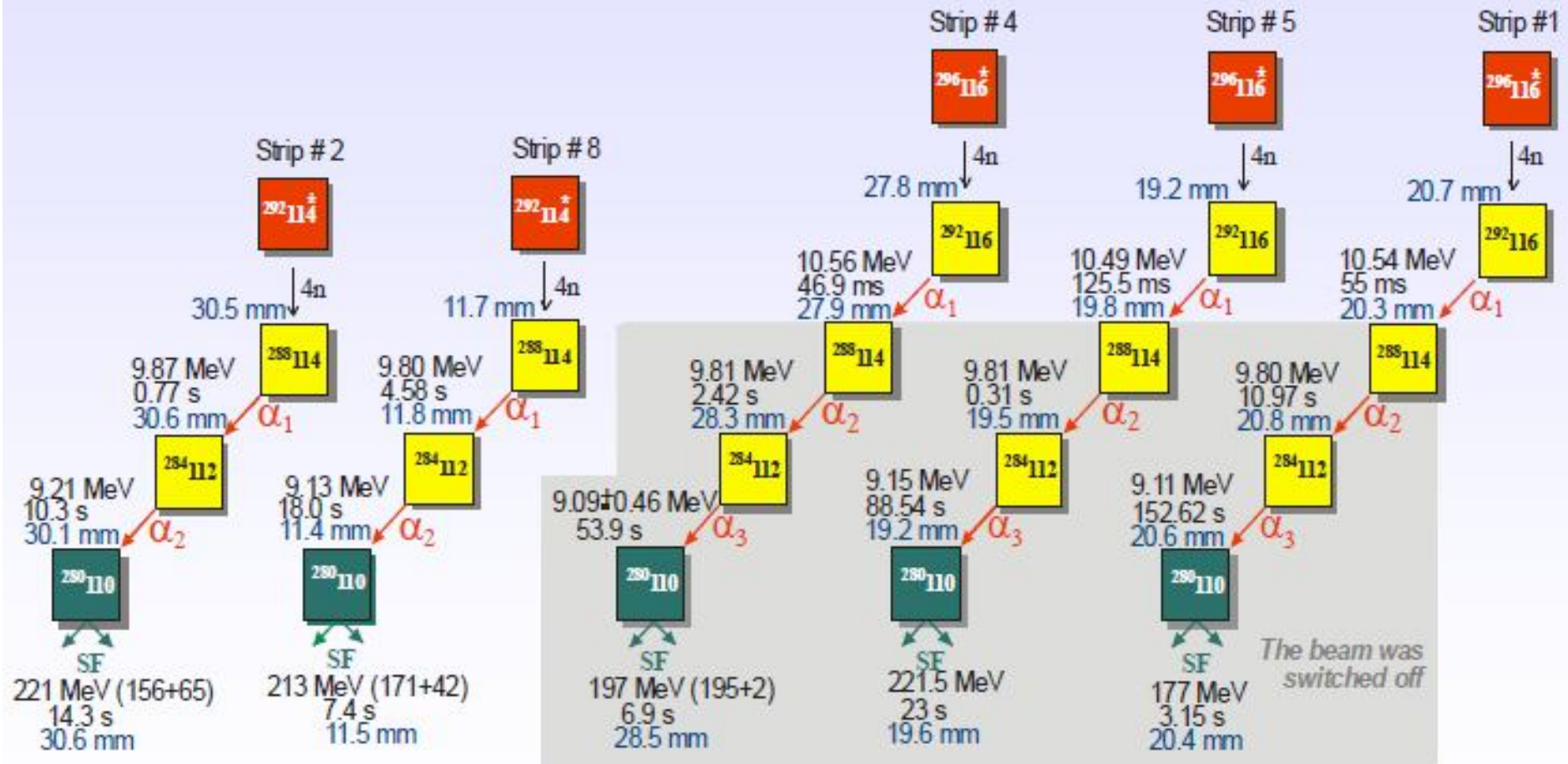




Total beam dose:  $1.5 \cdot 10^{19}$



Total beam dose:  $2.3 \cdot 10^{19}$



June 25, 1999 05:39

Oct. 28, 1999 22:24

July 19, 2000 01:21

May 02, 2001 06:21

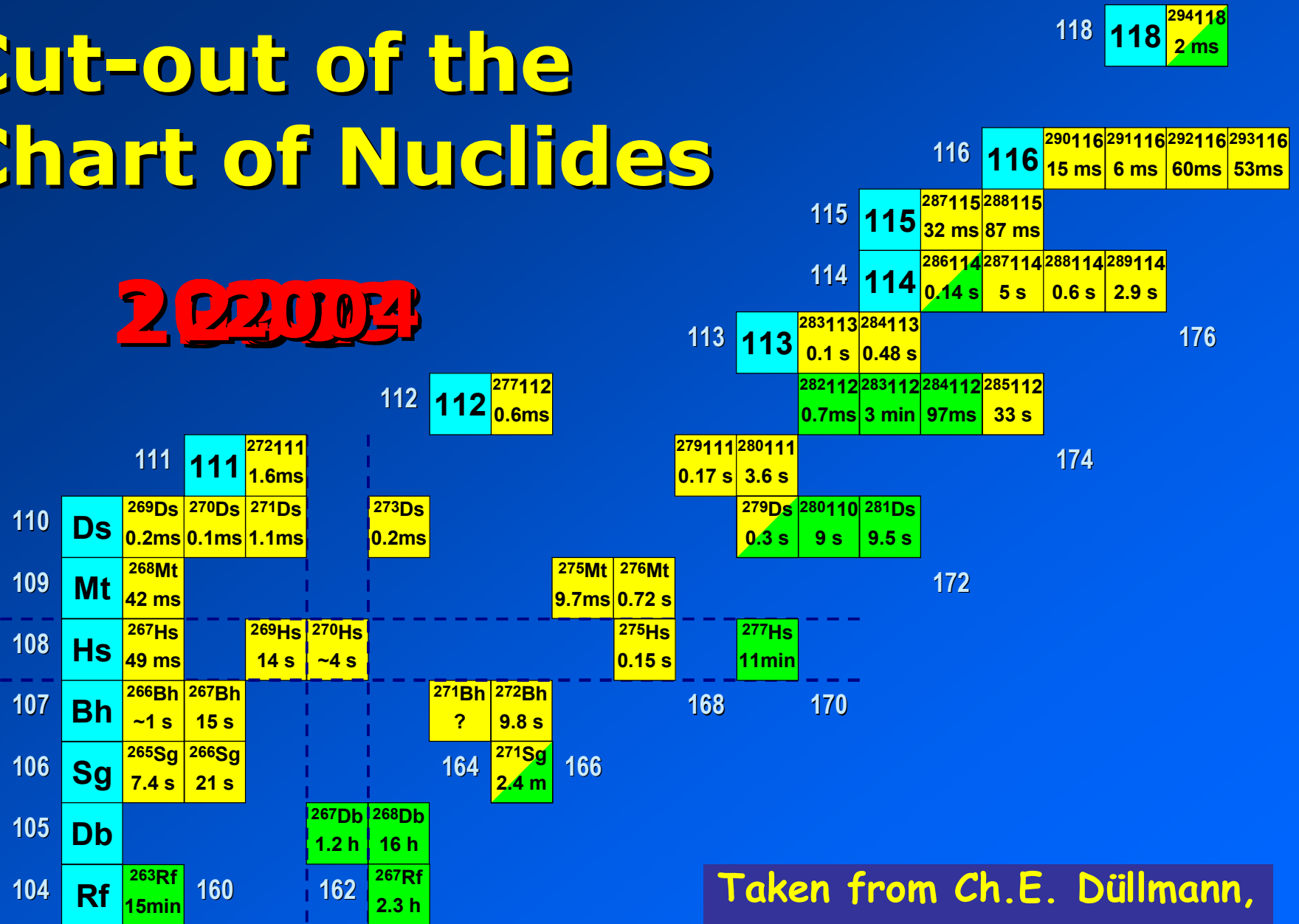
May 08, 2001 16:54

# Cut-out of the Chart of Nuclides

~~2004~~

Z  
↑

→ N



Taken from Ch.E. Düllmann,  
LBNL Berkeley



Określenie średniego czasu życia -  $\tau$

Prawdopodobieństwo, że w czasie  $t$  od momentu  $t = 0$  nie nastąpi rozpad

$$P_0(t) = \exp(-\lambda t)$$

Prawdopodobieństwo pojawienia się jednego zdarzenia w czasie  $dt$

$$dP_1(dt) = \lambda dt$$

Prawdopodobieństwo, że długość przedziału, w którym nastąpi rozpad leży między  $t$  i  $t+dt$

$$dP = P_0 dP_1(dt) = \lambda \exp(-\lambda t) dt$$

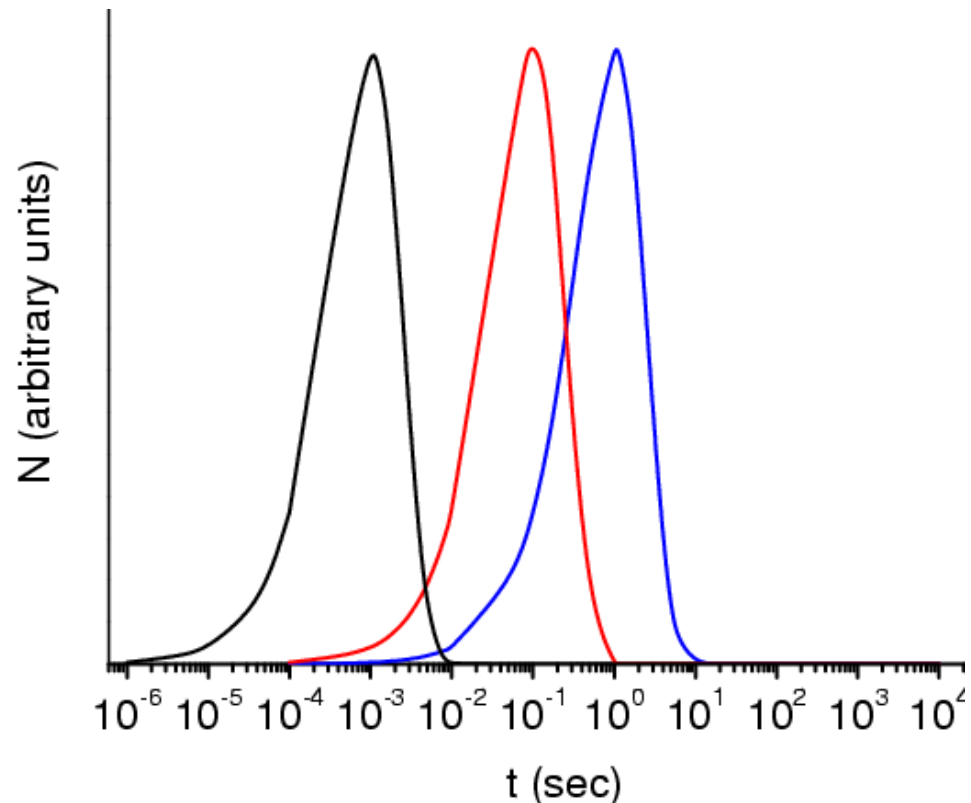
Rozkład czasów rozpadu

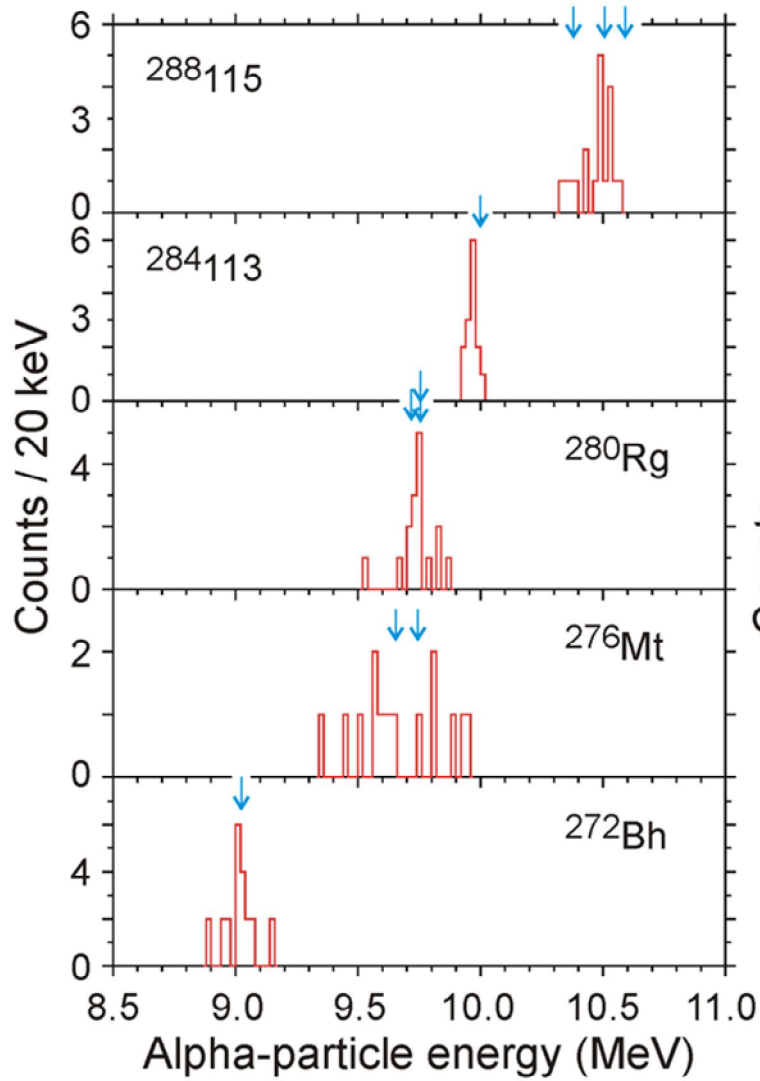
$$dN/dt = N \lambda \exp(-\lambda t)$$

Po podstawieniu  $\ln(t) = \omega$

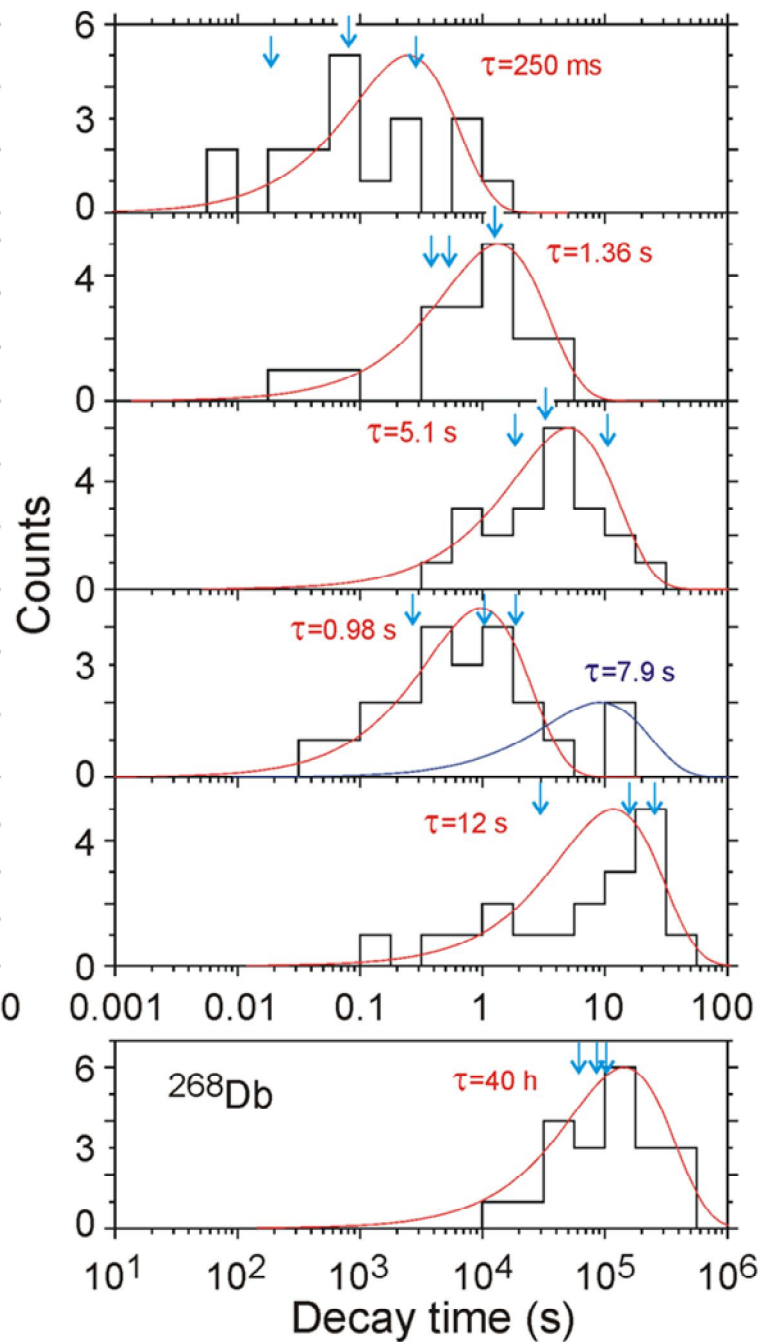
$$\frac{dN}{d\omega} = N \lambda e^{\omega} e^{-\lambda \omega}$$

Maksimum funkcji dla  $t = \ln(\tau)$



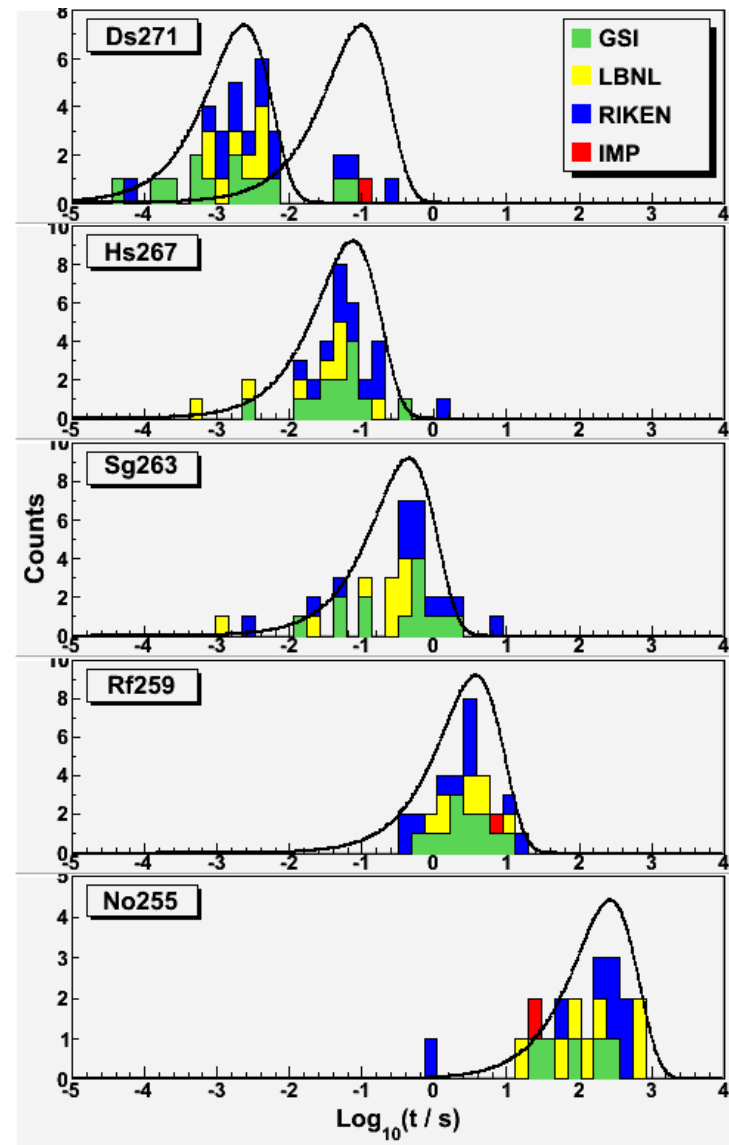
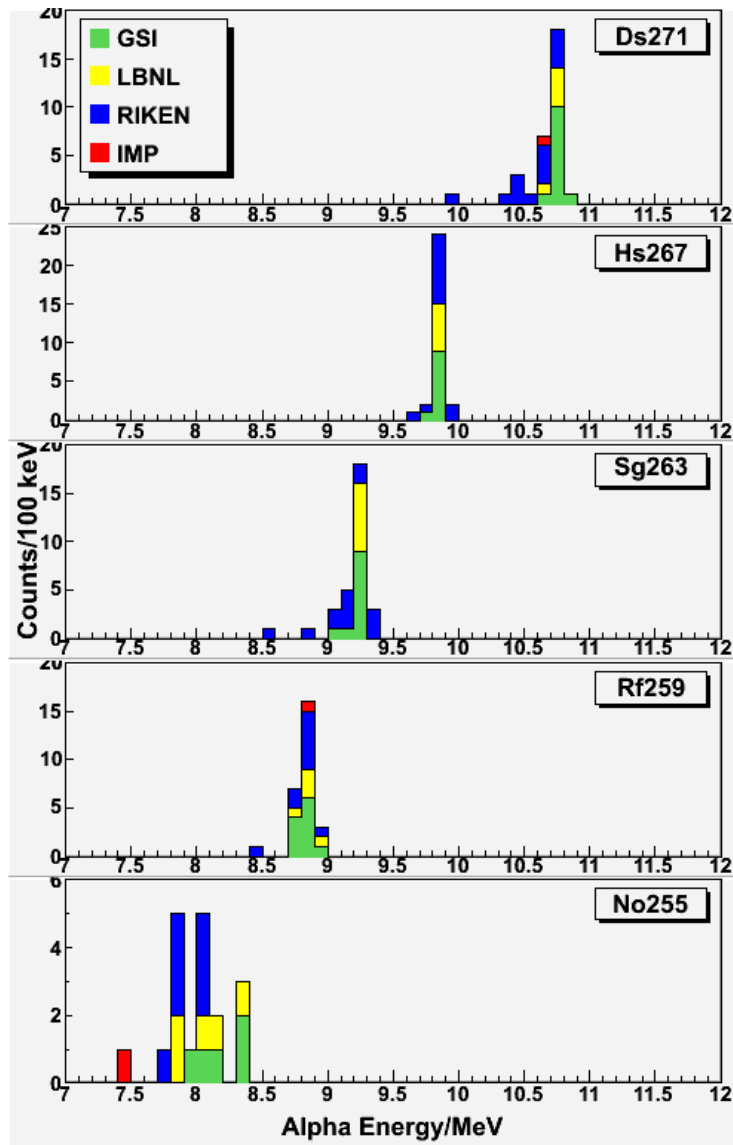


Arrows are for the first data 2003

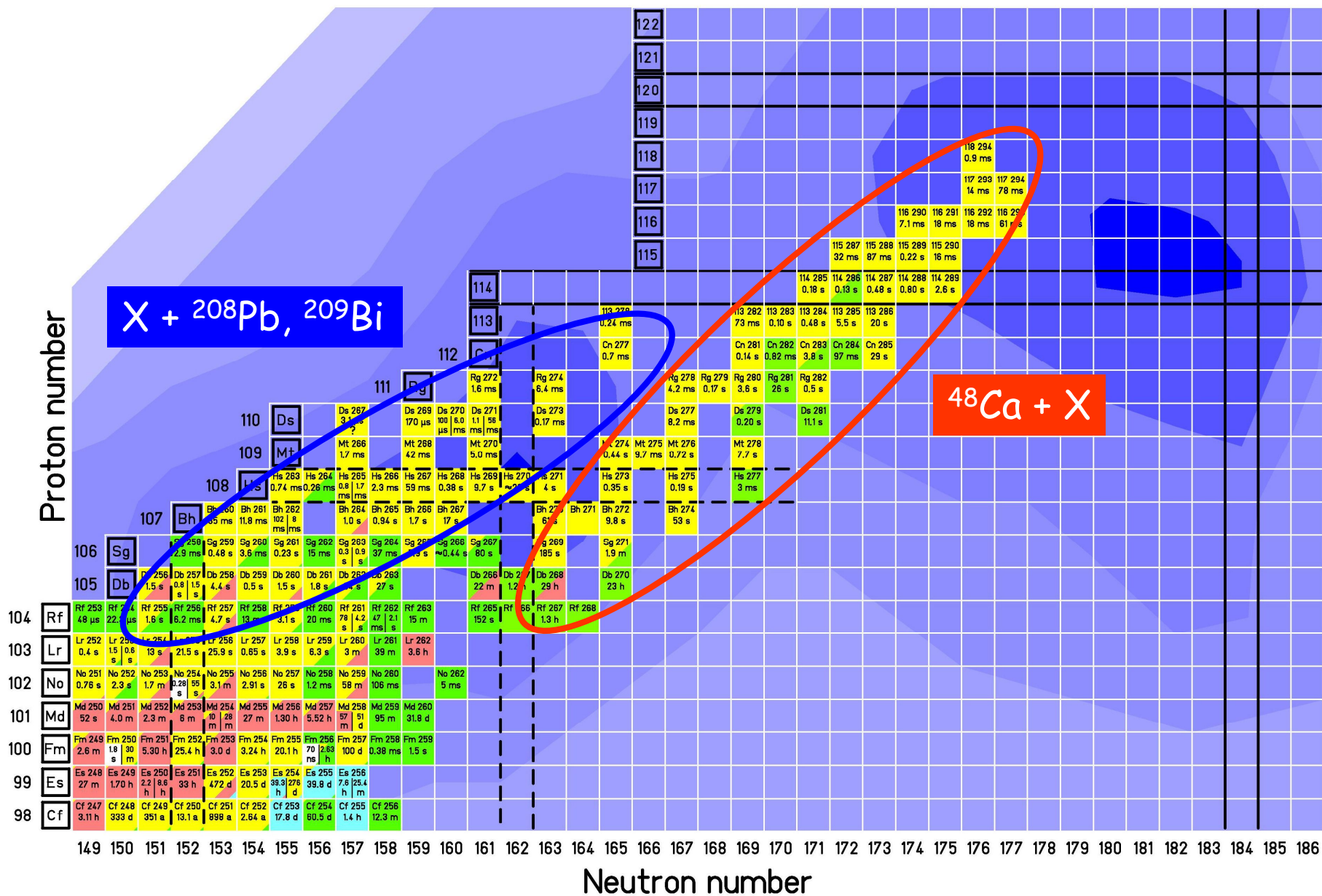




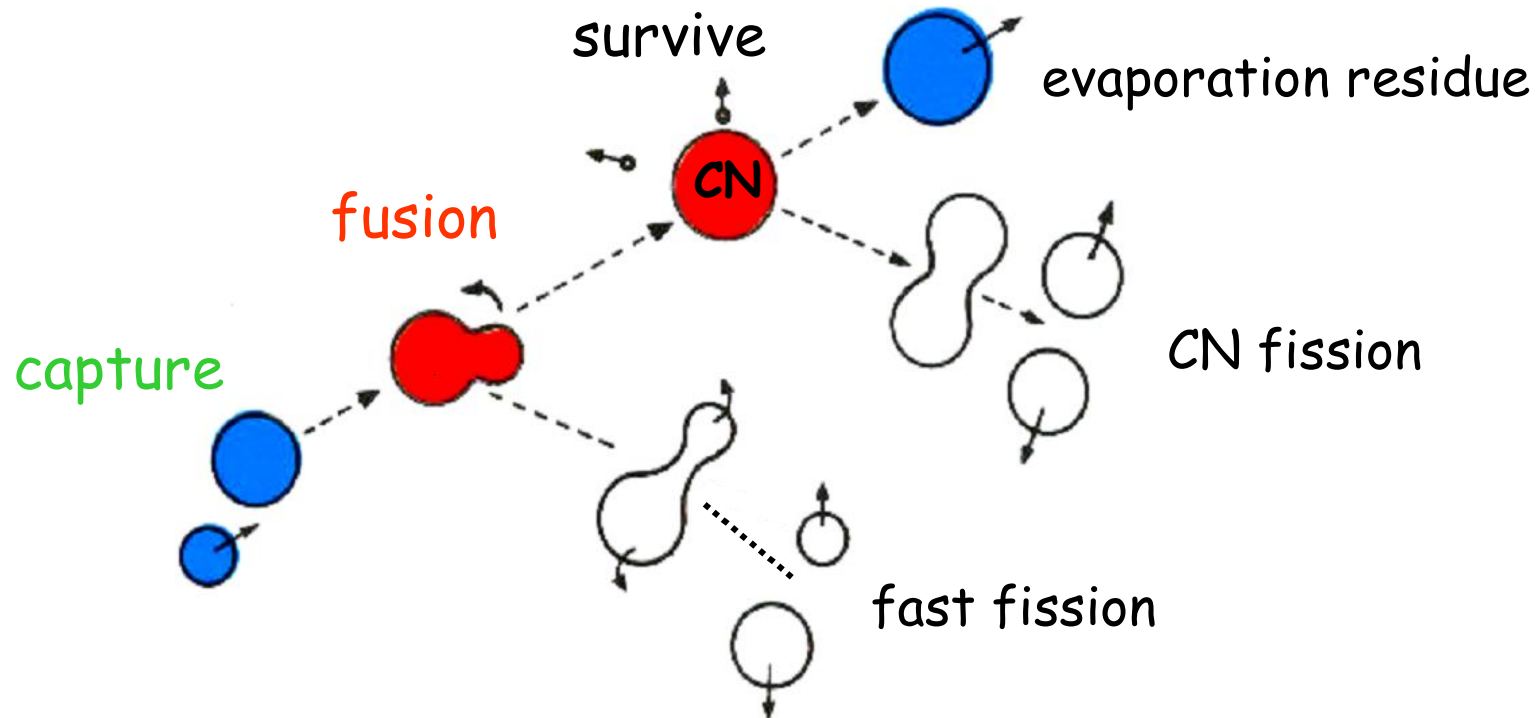
# Synthesis of Isotope $^{271}\text{Ds}$



# Perspektywy dalszych badań



# Zderzenie jądro-jądro, które może doprowadzić do syntezy jąder super-ciężkich



$$\sigma(\text{synthesis}) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_l P_l(\text{fusion}) P_{xn}'(\text{survive})$$

W. J. Świątecki, K. Siwek-Wilczyńska, and J. Wilczyński, *Acta Phys. Pol.* 34, 2049 (2003).

W. J. Świątecki, K. Siwek-Wilczyńska, and J. Wilczyński, *Phys. Rev. C* 71, 014602 (2005).

T. Cap, K. Siwek-Wilczyńska, J. Wilczyński, *Phys. Rev. C* 83, 054602 (2011)

K. Siwek-Wilczyńska, T. Cap, et al., *Phys. Rev. C* 86, 014611 (2012)

$$\sigma(\text{synthesis}) = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) P_l(\text{fusion}) P_l(\text{survive})$$

$l_{\max}$  - obliczone z wartości przekroju czynnego na wychwyty (capture).

$$\sigma_{cap}(E) = \pi \hat{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) T_l \approx \pi \hat{\lambda}^2 (l_{\max} + 1)^2$$

pół-empiryczna formuła

$$\sigma_{cap}(E) = \pi R_{\sigma}^2 \left[ X \sqrt{\pi} (1 + \text{erf } X) + \exp(-X^2) \right] \frac{w}{E \sqrt{2\pi}}$$

gdzie:  $X = \frac{E - B_0}{\sqrt{2w}}$ ,  $\text{erf } X$  - Gaussowska funkcja błędów

Równanie dyfuzji Smoluchowskiego dla potencjału parabolicznego

$$P_l(\text{fusion}) = \frac{1}{2} (1 - \text{erf} \sqrt{H_l / T})$$

H - bariera dla fuzji

T - temperatura układu

Dla reakcji xn

$$P_l(\text{survive}) = \prod_{i=1}^x \left[ \frac{\Gamma_{in}}{\Gamma_{in} + \Gamma_{if}} \times P_{i<} \right]$$

Prawdopodobieństwo, że po emisji i neutronu energia wzbudzenia będzie mniejsza niż próg na emisję kolejnego neutronu lub rozszczepienie

## Parcjalna szerokość na **emisję lekkich cząstek** - formuła Weisskopf'a

$$\Gamma_i = \frac{m_i}{\pi^2 \hbar^2} (2s_i + 1) \int_0^{E_i^{\max}} \varepsilon_i \sigma_i \frac{\rho_i(E_i^{\max} - \varepsilon_i)}{\rho(E^*)} d\varepsilon_i$$

gdzie:  $E_i^{\max} = E^* - E_{rot}^i - B_i - V_i^C - P$

Maksymalna termiczna energia wzbudzenia jądra końcowego (po emisji cząstki i)

$\sigma_i$  - przekrój czynny na produkcję jądra złożonego w procesie odwrotnym

$m_i, s_i, \varepsilon_i$  - masa, spin i energia kinetyczna emitowanej cząstki

$\rho, \rho_i$  - gęstość poziomów jąder początkowego i końcowego

Szerokość na **rozzszczepienie** (metoda stanów przejściowych),

$$\Gamma_{fiss} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{E_f^{\max}} \frac{\rho_{fiss}(E_f^{\max} - K)}{\rho(E^*)} dK$$

$E_f^{\max} = E^*(saddle) - E_{rot}(saddle) - P$

Maksymalna termiczna energia wzbudzenia w siodle

**Gęstość poziomów jądrowych** liczona formułą dla gazu Fermiego

$$\rho(E) \propto \exp(2\sqrt{aE})$$

**uwzględnienie efektów powłokowych**

$$a = a_{macro} \left[ 1 + \frac{\delta_{shell}}{U} \left( 1 - e^{-U/E_d} \right) \right] \quad 4$$

Do obliczenia **prawdopodobieństwa przetrwania  $P,(\text{survive})$**  musimy znać (dla wszystkich jąder w kaskadzie deekscytacji):

- **masy w stanie podstawowym,**
- **bariery na rozszczepienie,**
- **poprawki powłokowe oraz deformacje jąder** (w stanie podstawowym i siodle).

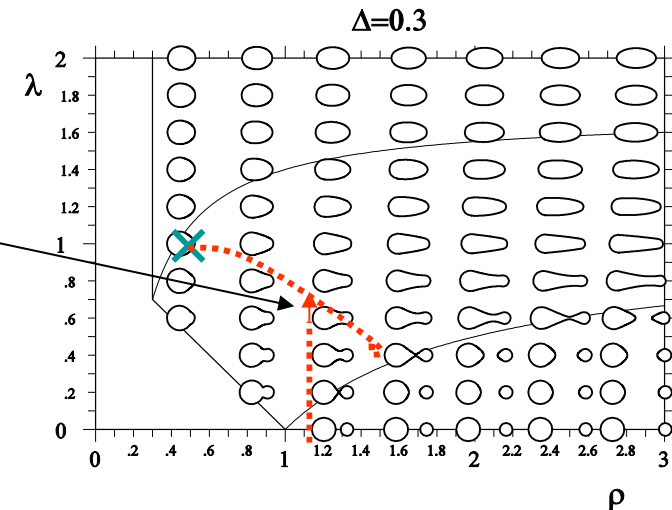
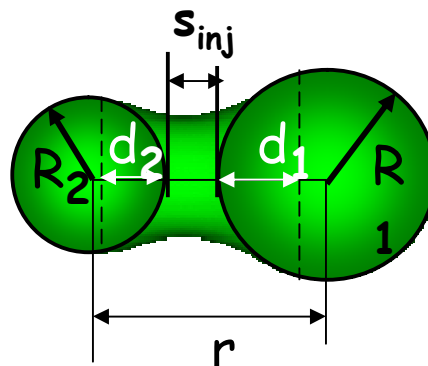
W naszych obliczeniach wykorzystywaliśmy dane wyznaczone z użyciem warszawskiego modelu mikro-makro z uwzględnieniem kształtów nieosiowych.

M. Kowal, P. Jachimowicz, A. Sobiczewski, Phys. Rev. C82 (2010) 014303

M. Kowal, P. Jachimowicz, J. Skalski, arXiv:1203.5013

P. Jachimowicz, M. Kowal, J. Skalski (to be published)

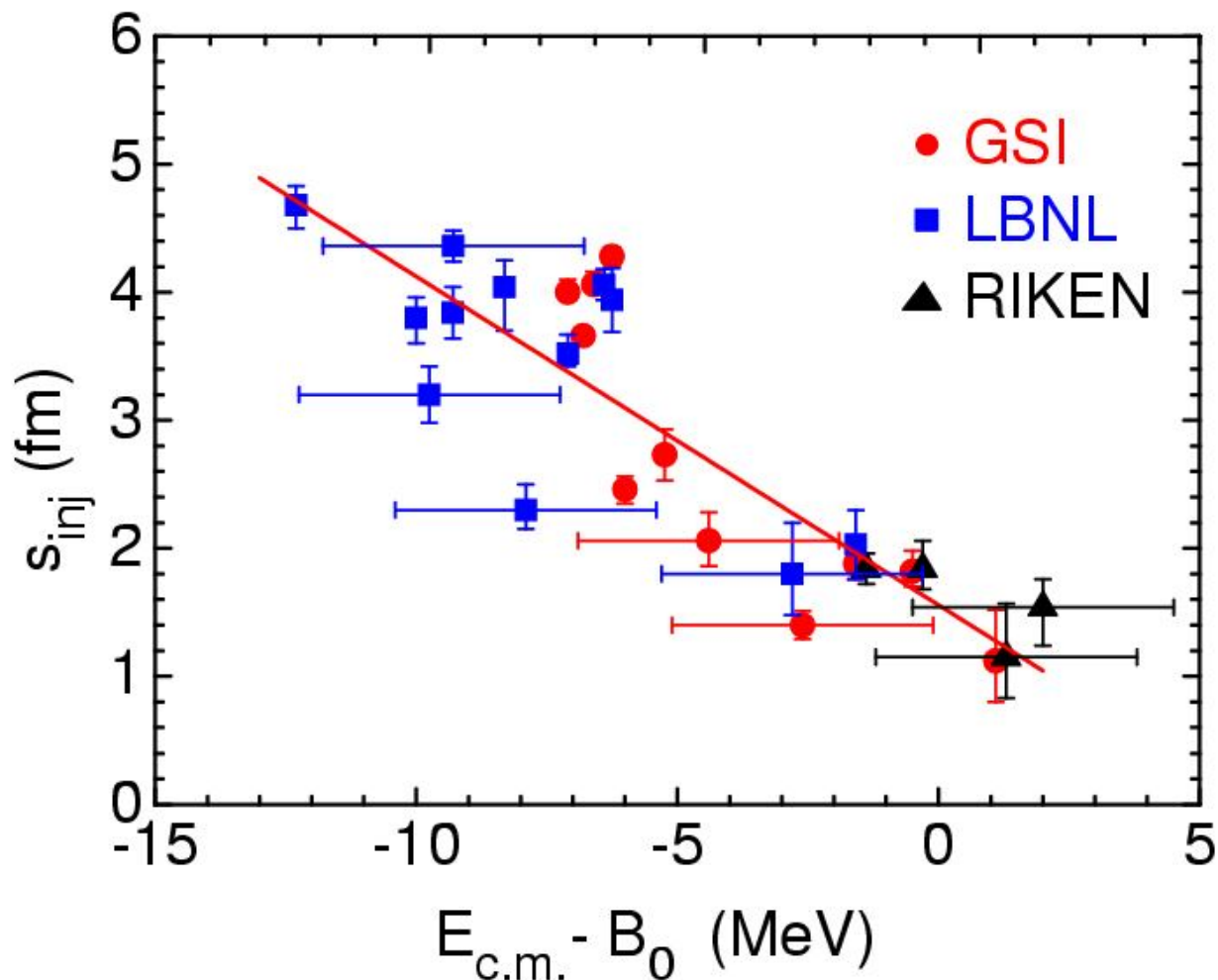
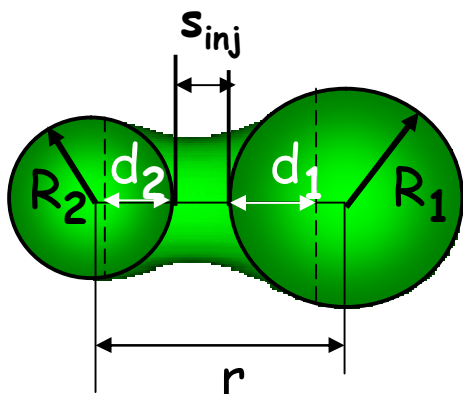
$$\sigma(\text{synthesis}) = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) P_l(\text{fusion}) P'_{x_n}(\text{survive})$$

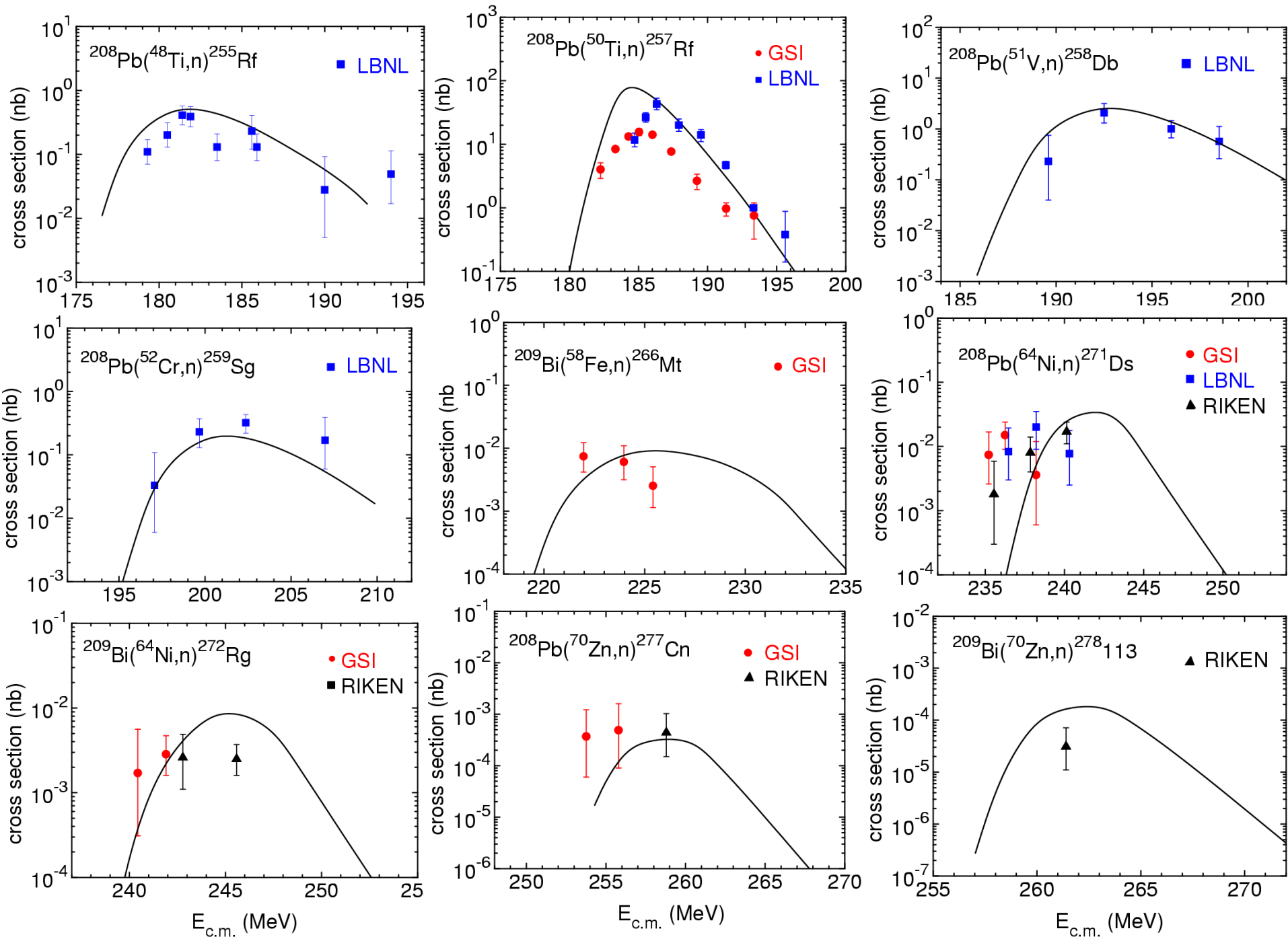


Systematyka parametru  $s_{inj}$  uzyskana z dopasowania do maksymalnych wartości eksperymentalnie wyznaczonych przekrojów czynnych dla reakcji „cold fusion” (wszystkie istniejące dane doświadczalne - 27 reakcji cold fusion )

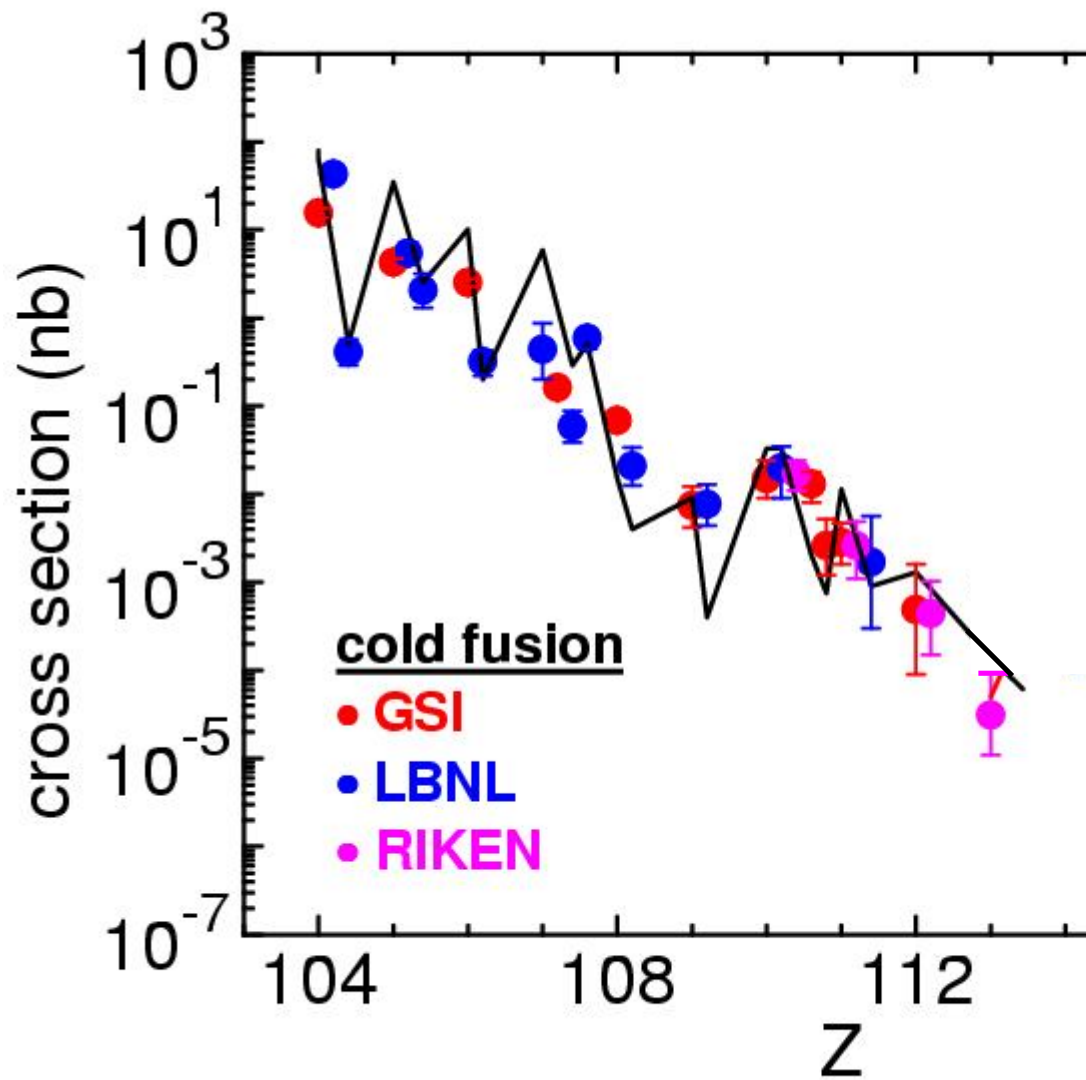
Pociski:  
 $^{48}\text{Ti} - ^{70}\text{Zn}$

Tarcze:  
 $^{208}\text{Pb}$  or  $^{209}\text{Bi}$



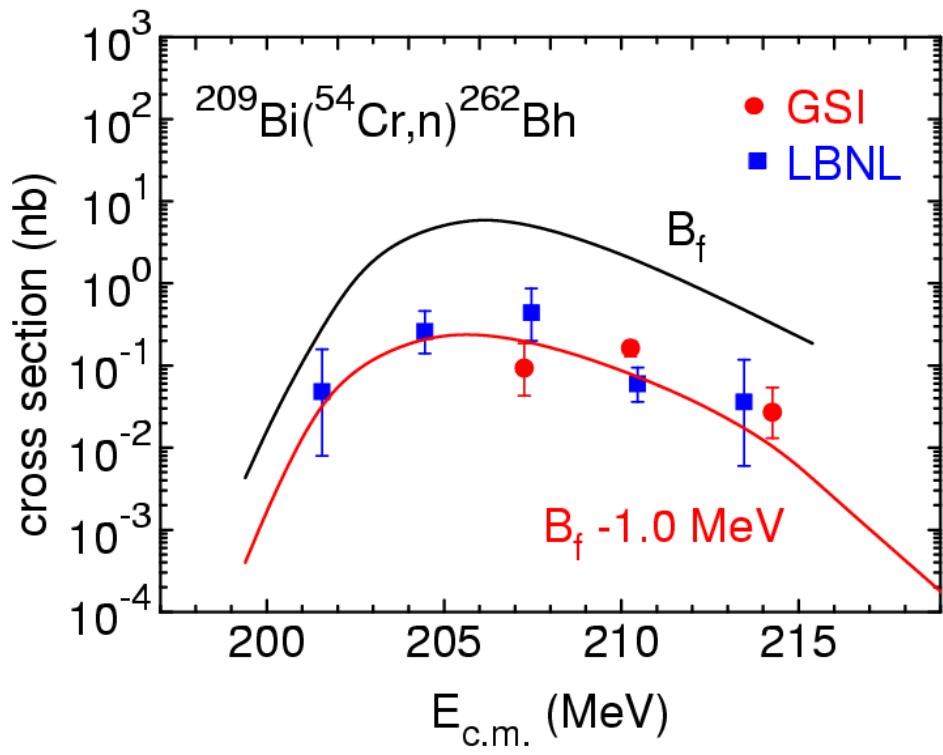




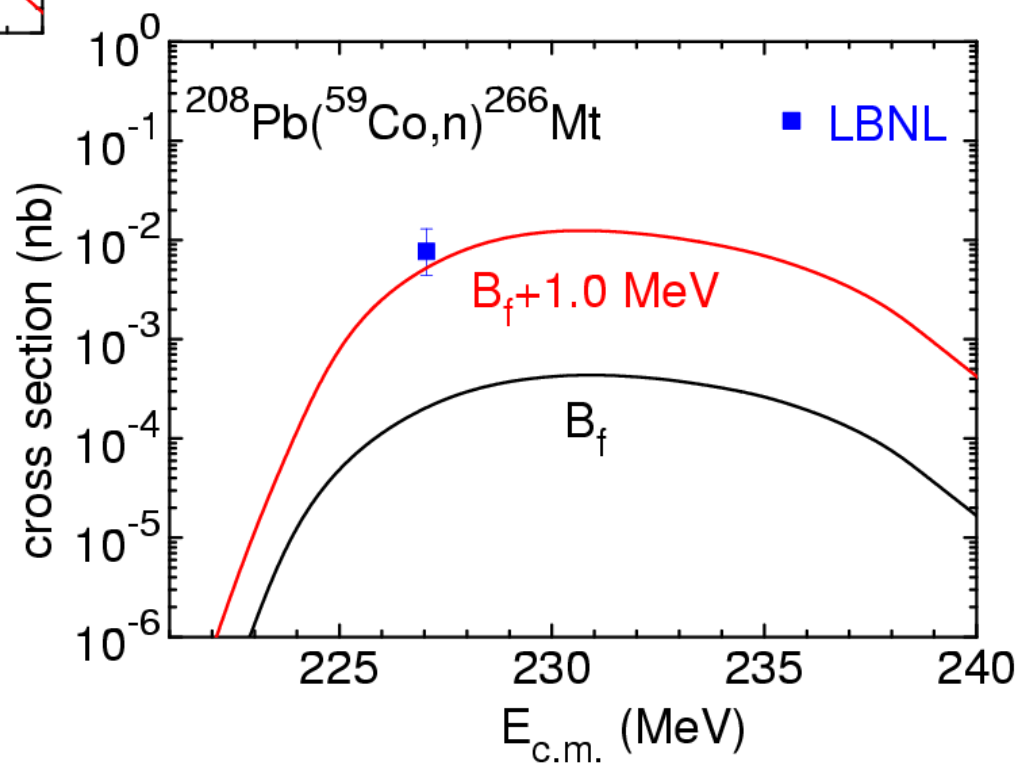


Dobre odtworzenie wartości przekrojów czynnych w dużym zakresie - 7 rzędów

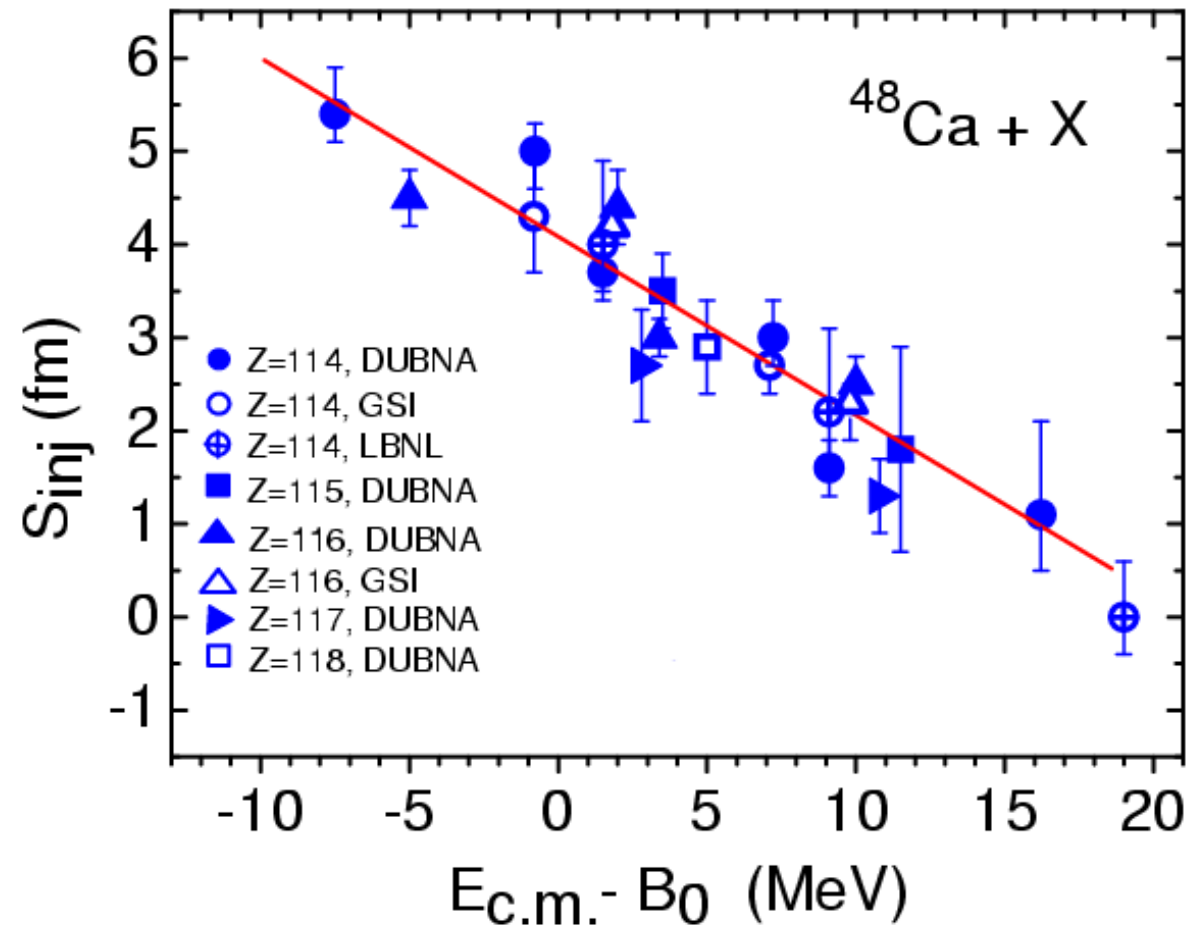
Odtworzenie zależności przekrojów czynnych od własności strukturalnych pocisku i tarczy

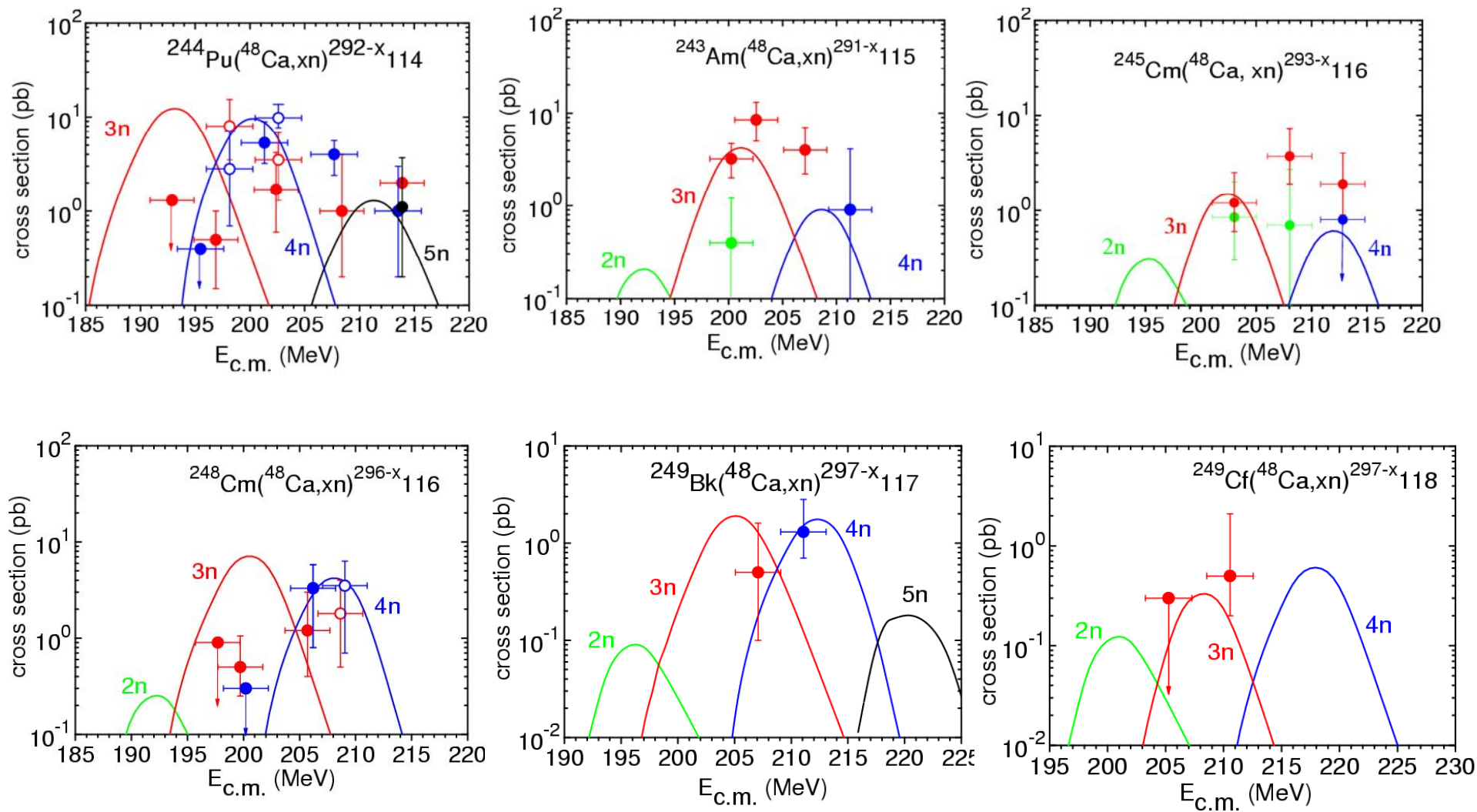


Przekrój czynny jest bardzo czuły na wartość bariery na rozszczepienie

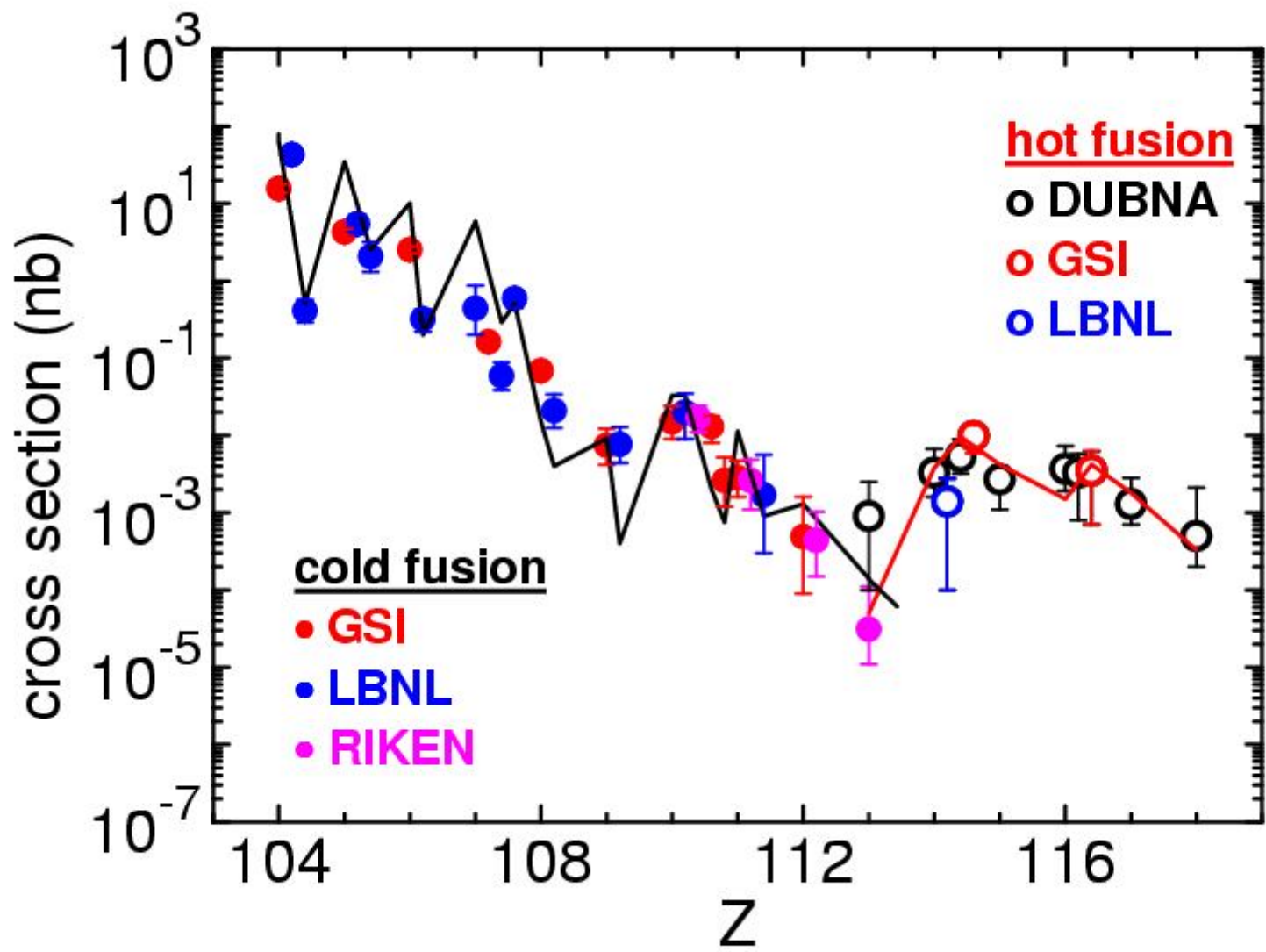


Systematyka parametru  $s_{inj}$  uzyskana z dopasowania do maksymalnych eksperymentalnych wartości przekrojów czynnych dla kanałów  $2n$ ,  $3n$ ,  $4n$  i  $5n$  w reakcjach  $^{48}\text{Ca} + X$  (wszystkie istniejące dane eksperymentalne)





- experiment Dubna
- experiment GSI



# Jak produkować jądra o $Z > 118$ ?

Podstawowe problemy eksperymentalne :

Wiązka  $^{48}\text{Ca}$  wymaga tarczy o  $Z > 98$ .

możliwości:  $Z=99$   $^{252}\text{Es}$ ,  $^{254}\text{Es}$   $T_{1/2} = 472 \text{ d}, 275.7 \text{ d}$   
 $Z=100$   $^{257}\text{Fm}$   $T_{1/2} = 100.5 \text{ d}$

Alternatywa: wiązka o  $Z > 20 \rightarrow$  znacznie mniejszy przekrój czynny

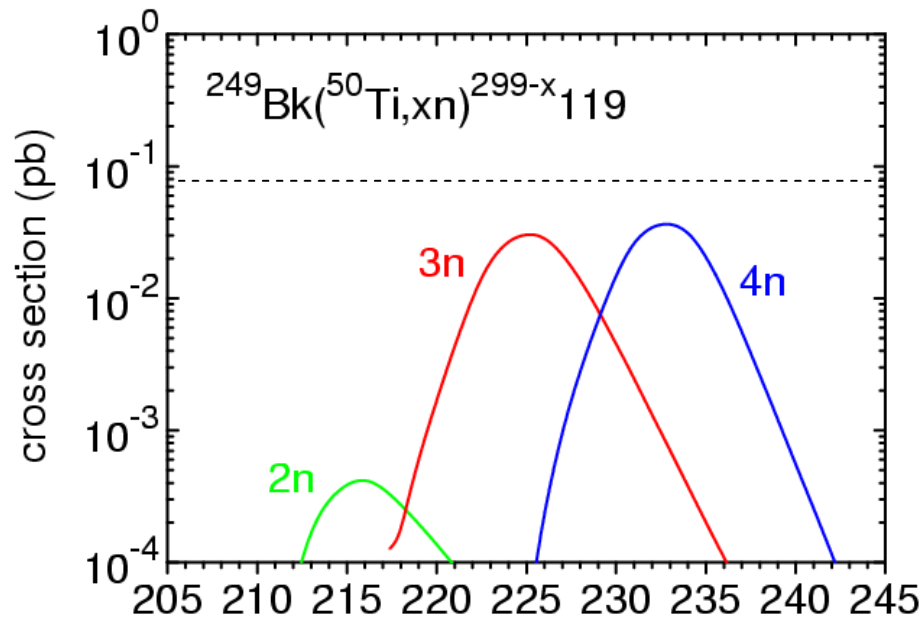
Eksperymenty 2007/2008  $^{64}\text{Ni} + ^{238}\text{U} \rightarrow ^{302}120^*$   $^{58}\text{Fe} + ^{244}\text{Pu}$   
GSI  $\rightarrow$   $\leftarrow$  Dubna  
Przekrój czynny  $< 0.1 \text{ pb}$   $< 0.4 \text{ pb}$

Eksperymenty 2010/2014

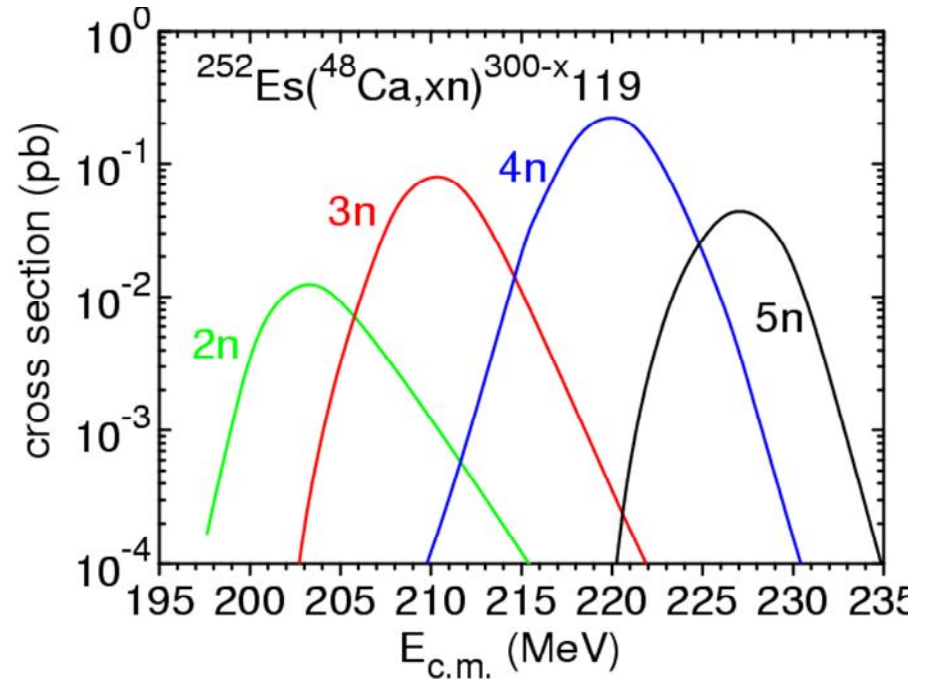
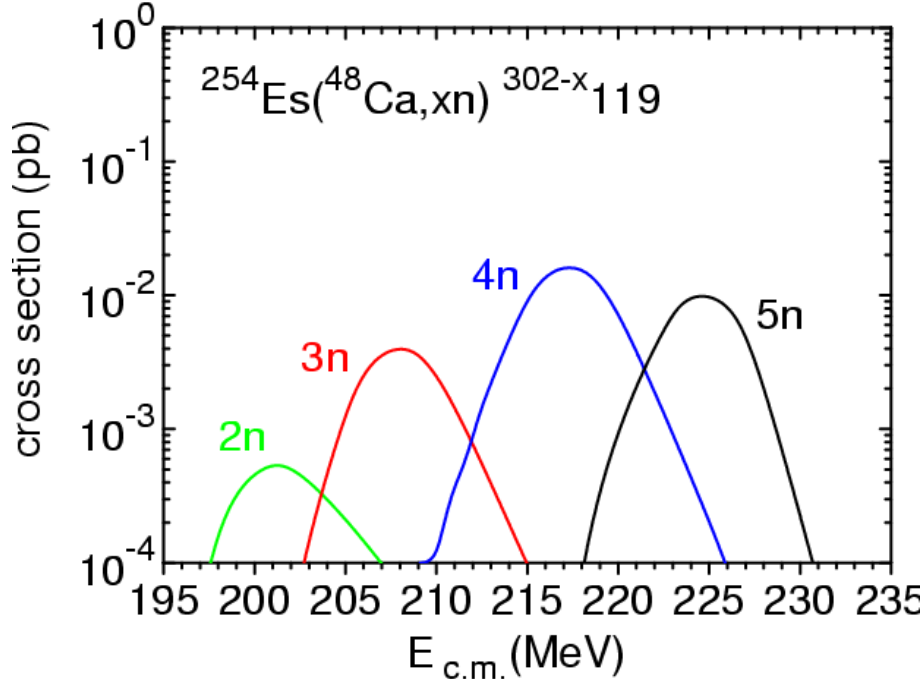


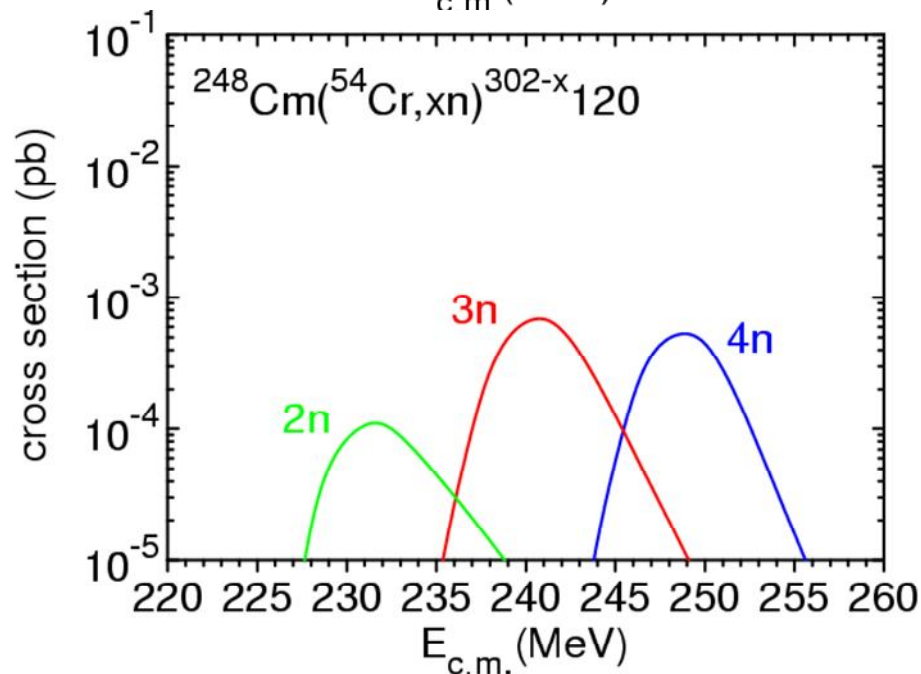
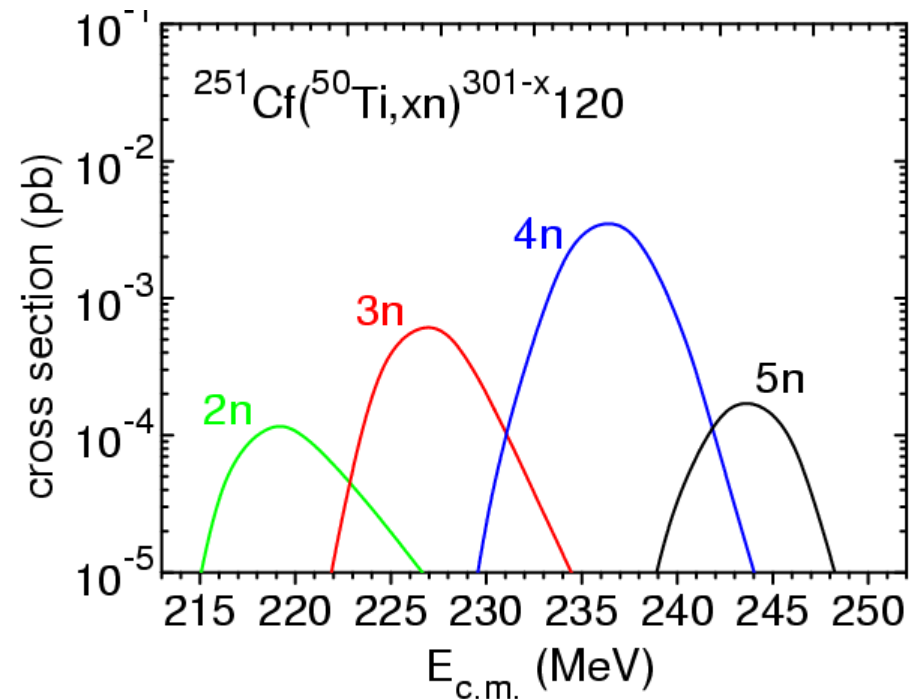
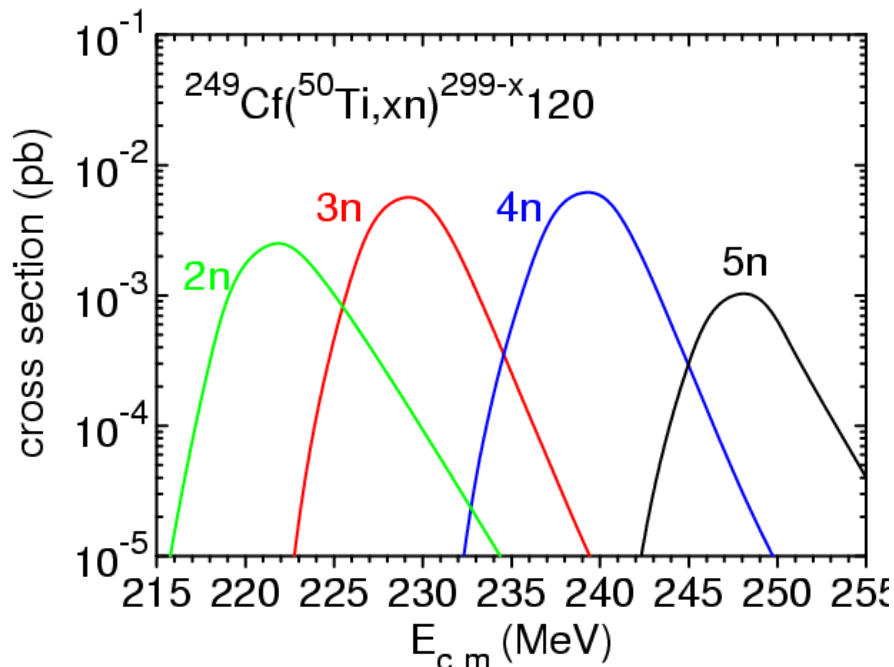
- Reakcje wielonukleonowego transferu ?
- Wielokrotne wychwyty neutronów i rozpad  $\beta^-$  ?

Systematyka  $s_{inj}$  stosowana do wyznaczenia przekroju czynnego na syntezę jąder o  $Z = 119$  i  $120$



Dla reakcji  $^{48}\text{Ca} + ^{252}\text{Es}$  przewidujemy mierzalny przekrój czynny





Największy przekrój czynny na syntezę pierwiastka o  $Z=120$  dla reakcji  $^{50}\text{Ti} + ^{249}\text{Cf}$ . Maksimum rzędu kilku fb, poniżej obecnych możliwości eksperymentalnych.

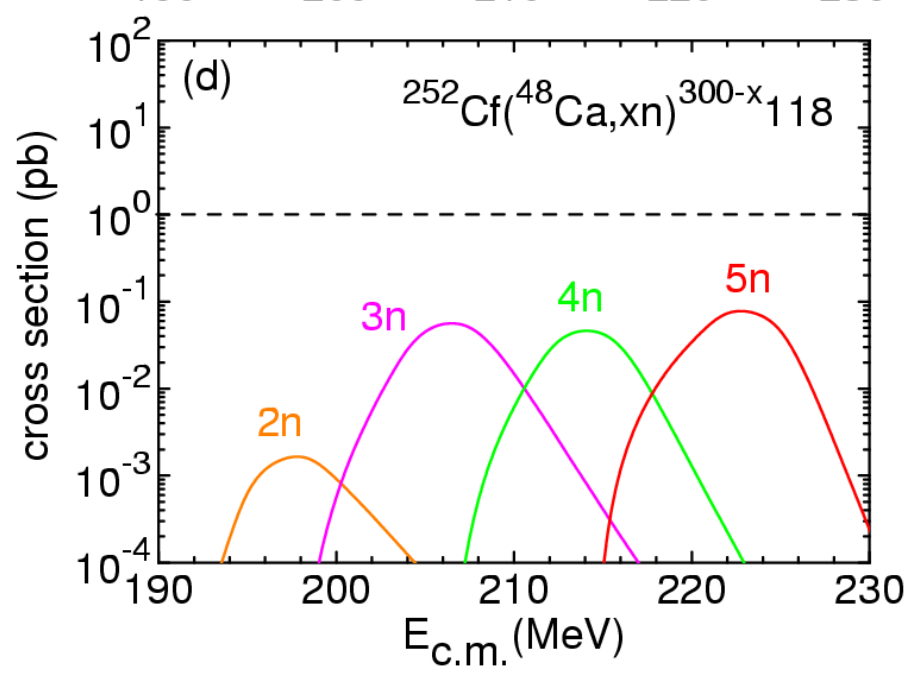
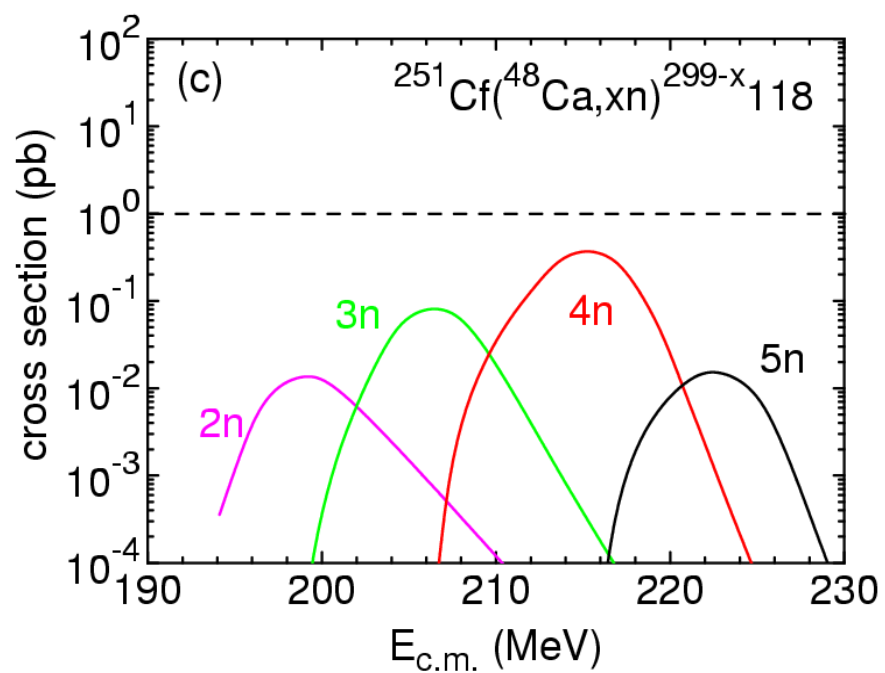
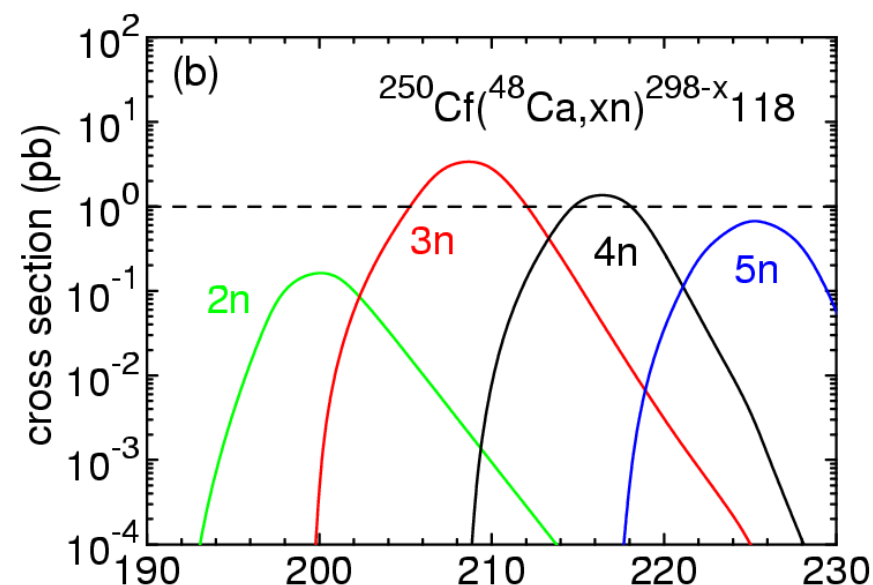
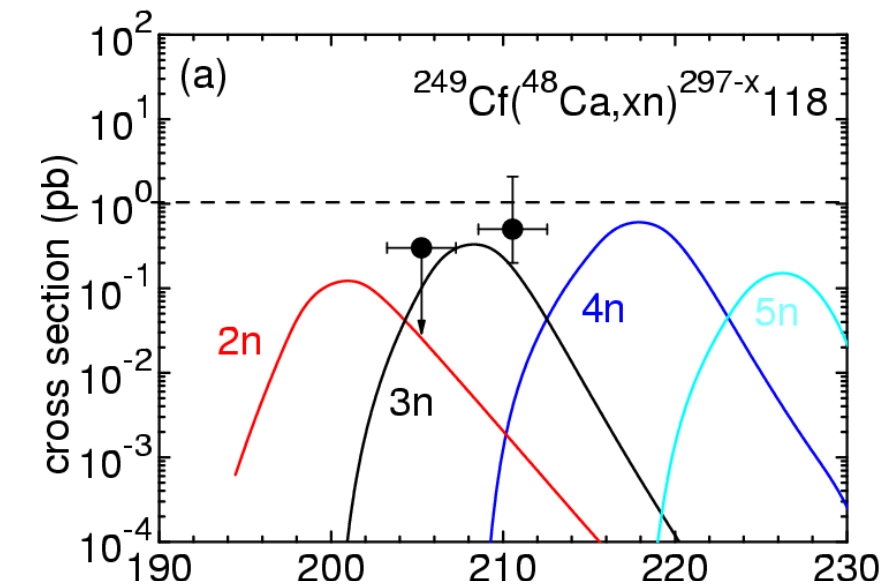
K. Siwek-Wilczyńska, T. Cap, J. Wilczyński, IJMP E19 (2010) 500



# Eksperyment z silnie radioaktywną tarczą zawierającą 4 izotopy californium - synteza nowych izotopów pierwiastka 118 i 116

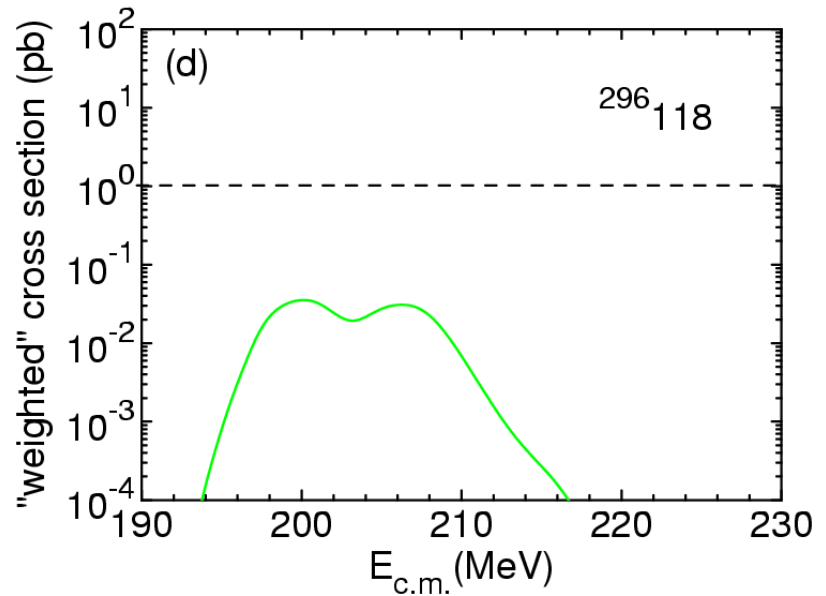
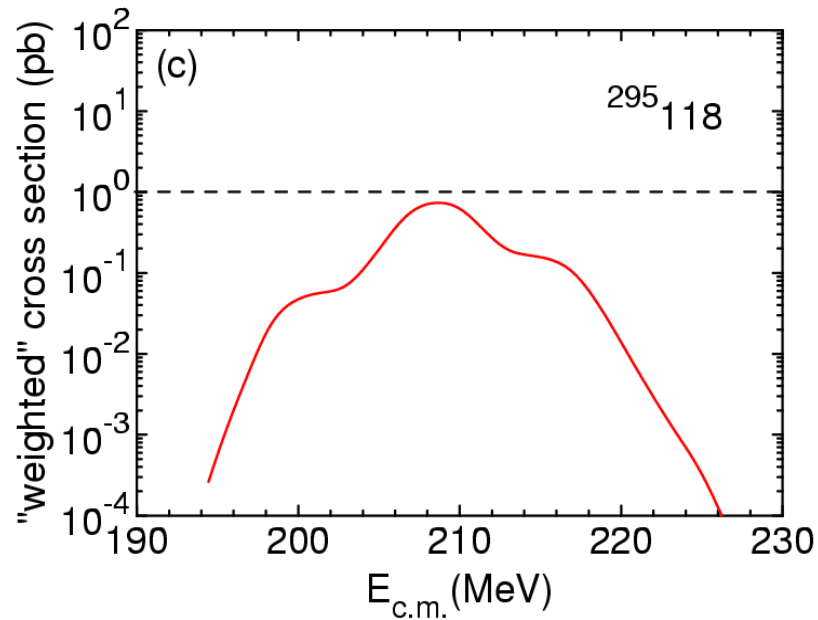
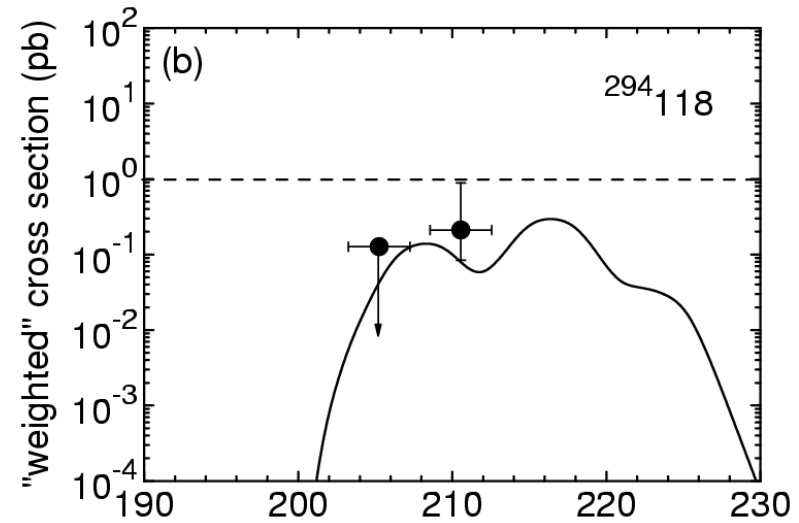
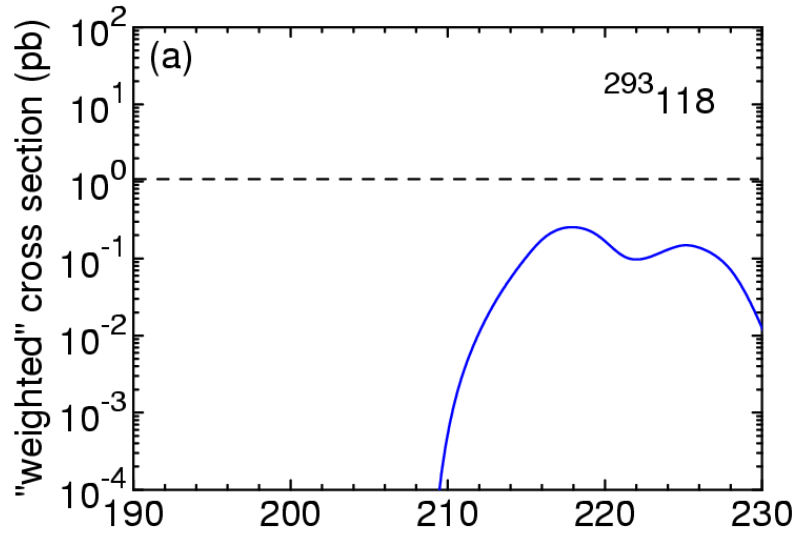
	$f_i$ isotopic content (Feb. 2013)*	$T_{1/2}$
$^{249}\text{Cf}$	42.31 %	351 y
$^{250}\text{Cf}$	21.76 %	13.08 y
$^{251}\text{Cf}$	35.64 %	898 y
$^{252}\text{Cf}$	0.29 %	2.64 y

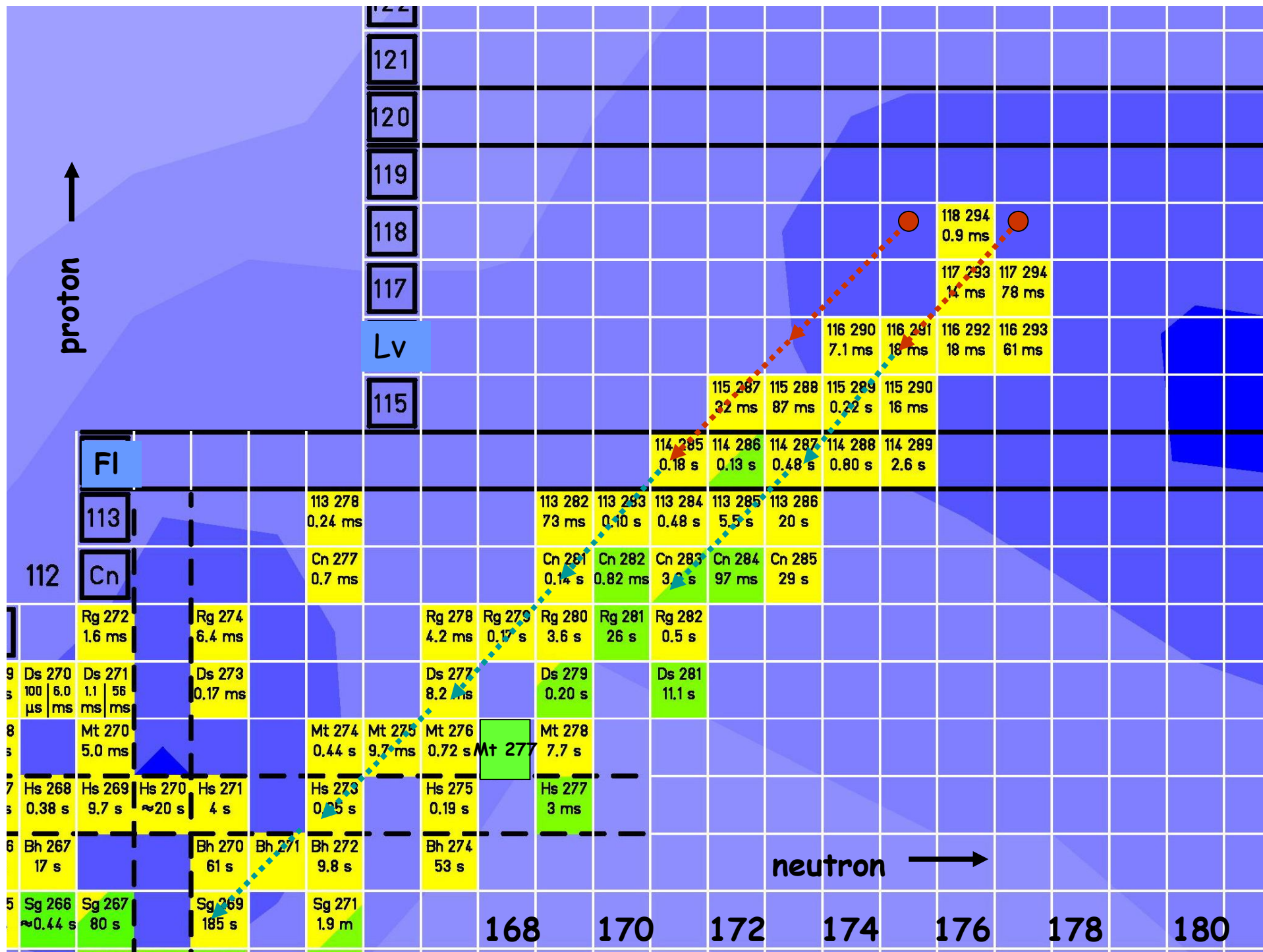
\*Yuri Oganessian, private communication

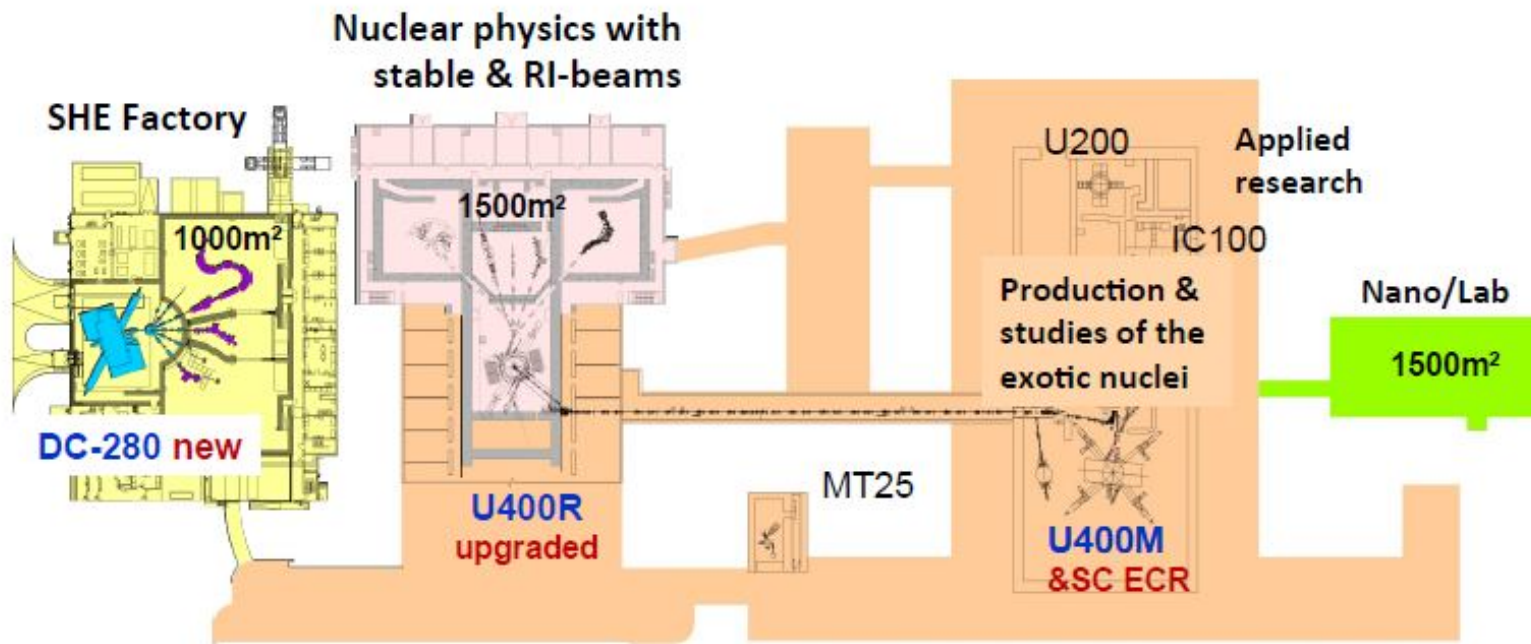


— 296118    — 295118    — 294118    — 293118

"weighted" cross section ( $^{A}_{118}$ ) =  $\sum_{i=249}^{252} f_i \times \sigma_i(A)$







U400M-U400R Accelerator Complex

FLNR (JINR) 2016

Beam parameters	HI-Physics U-400R	SHE-Factory DC-280
Projectiles	Stable and RIB ( $T_{1/2} > 0.1s$ )	Stable only
Projectile masses	4He – 238U	40Ar – 86Kr
Energy range	0.5 – 27.0 MeV/n	5 – 8 MeV/n
Energy resolution	0.5%	1.5%
Beam intensity (for 48Ca)	2.5 pμA	10-20 pμA
SHE-research program	≤30%	~100%
Registered decay chains of SHN (per year)	120 (now <b>30</b> )	<b>3000 - 5000</b>
State of readiness	75%	In course of design