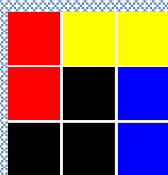
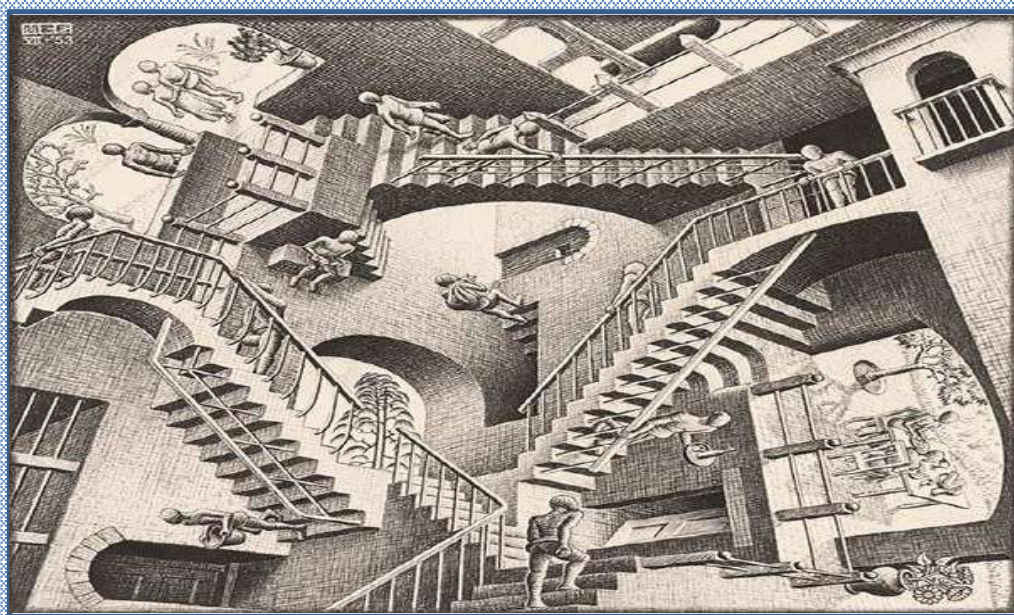


Wykłady monograficzne z fizyki jądrowej

8

Zygmunt Patyk

Grupa Lorentza

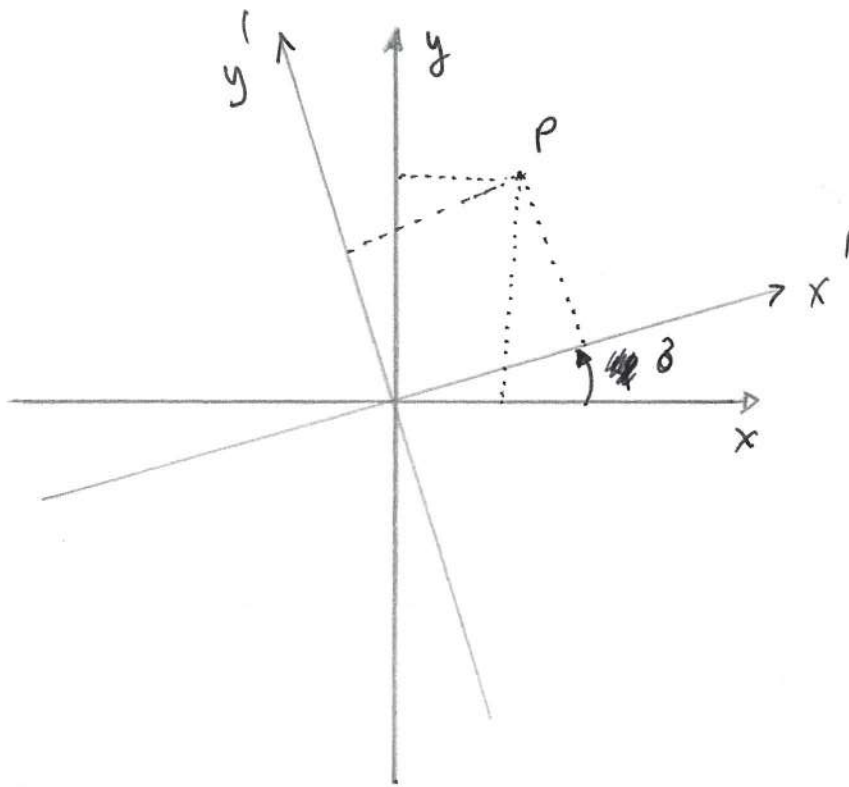


ZAKŁAD FIZYKI JĄDROWEJ
UNIwersYTET WARSZAWSKI

2018/19 semestr zimowy

Wykład 1-2

W1-1



Niech zadane będą dwa układy współrzędnych u i u' .

Punkt P ma współrzędne

$$x' = x + \delta \cdot y, \quad z' = z$$

$$y' = y - \delta \cdot x, \quad t' = t$$

Rozważ dowolną funkcję $\phi(x, y, z, t)$.

W nowym punkcie możemy układowi u' oraz postaci, rozwiń ją w szeregi Taylora do 1 rzędu

$$\phi(x', y', z', t') = \phi(x + \delta \cdot y, y - \delta \cdot x, z, t)$$

$$\approx \phi(x, y, z, t) + \left(\delta \cdot y \frac{\partial}{\partial x} - \delta \cdot x \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi(x, y, z, t)$$
$$= \left[1 + \delta \left(y \cdot \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \phi(x, y, z, t)$$

Operator $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ nazivamy
 generatorem prekrataceni obrata. volit
 oni z 0 maty lept 3.

Generatory obrata (mnozine pna cyuniki
 usojomy i) s zdefinirovane

$$I_x = i \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$I_y = i \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$I_z = i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Prekrataceni z ~~z~~ uladu u do u'
 me postoi

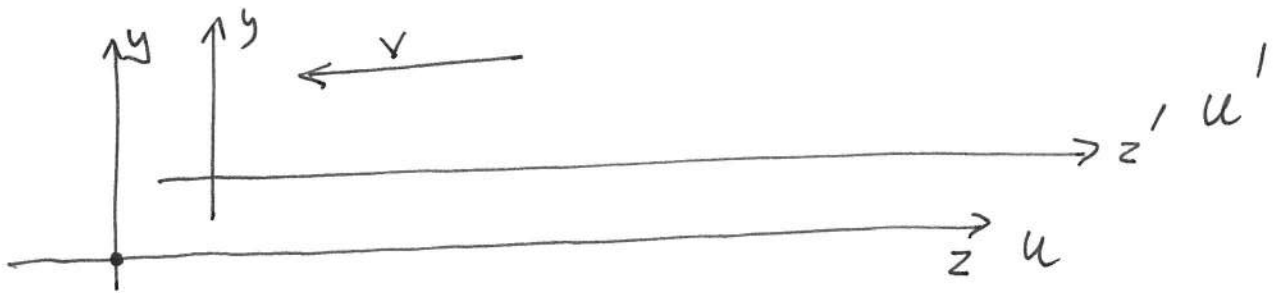
$$(1 - i \sum I_i) \phi(x, y, z, t) = \phi(x', y', z', t')$$

Operator I_i speni zvi zhi
 komutativne

$$[I_i, I_j] \equiv I_i I_j - I_j I_i = i \epsilon_{ijk} I_k, \text{ pdri}$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i \neq j \neq k, \text{ panyti iloi transpozicij} \\ -1 & i \neq j \neq k, \text{ nicpanyti iloi transpozicij} \\ 0 & \text{dva indeksa s rone} \end{cases}$$

Transformacja Lorentz



$$\begin{cases} z' = z + \beta v \cdot t & \text{dla } \beta v > 0 \\ t' = t + \beta v \cdot z \\ y' = y \\ x' = x \end{cases}$$

unikal t' pomimo
że v lewo względem
 u

Podobne rozważania prowadzi do

$$\phi(x', y', z', t') = \left(1 + \beta v \left(z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \phi(x, y, z, t)$$

Wprowadzamy 3 generatory

$$O_x = \left(x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$O_y = \left(y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$O_z = \left(z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Związki komutacyjne

$$[O_x, O_y] = i I_z$$

$$[O_x, I_y] = i O_z$$

$$\phi(x', y', z', t') = \left(1 + \beta v \cdot O_z \right) \phi(x, y, z, t)$$

Ogólni związki te symetrii

$$[O_i, O_j] = i \epsilon_{ijk} I_k$$

$$[O_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} O_k$$

$$[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k$$

Wzrostki wprowadzić ~~można~~, generatory

A_i i B_i zdefiniowane

$$A_i = \frac{1}{2} [I_i + O_i]$$

$$B_i = \frac{1}{2} [I_i - O_i] \quad \text{to zachodzi}$$

$$[A_i, B_j] = 0 \quad \text{dla dowolnych } i, j$$

$$[A_i, A_j] = i \epsilon_{ijk} A_k$$

$$[B_i, B_j] = i \epsilon_{ijk} B_k$$

$$I_i = A_i + B_i$$

$$O_i = A_i - B_i$$

Pytanie

Wybierz bazę funkcji: $\{x, y, z, t\}$

Zmienna	x	y	z	t
Nr	1	2	3	4

Operatory $I_x, I_y, I_z, O_x, O_y, O_z$ przekształcają bieżące funkcje: $\{x, y, z, t\}$ w siebie.

$$\begin{cases} I_x \cdot x = 0 \\ I_x \cdot y = iz \\ I_x \cdot z = -iy \\ I_x \cdot t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} & & & & y & z \\ \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & -i & \\ & & i & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} & = & i & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} O_x \cdot x = t \\ O_x \cdot y = 0 \\ O_x \cdot z = 0 \\ O_x \cdot t = x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} & & & & x & t \\ \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Postępujcie podobnie, dostaję (parte lewathi = C,

$$I_x = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & -i & \\ & & & i & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}, \quad I_y = \begin{bmatrix} & & & & & i \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -i & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$I_z = \begin{bmatrix} & & & & & -i \\ & & & & & \\ i & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$O_x = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \quad O_y = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & 1 \\ & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$O_2 = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}$$

totus spravočnici (mathematice), ni za drudi

$$[O_x, O_y] = i I_2$$

$$[O_x, I_y] = i O_2$$

$$[I_x, I_y] = i I_2, \text{ over ungtli cykline pnestaricni.}$$

Konstrukcija operatorov A_i i B_i

$$A_i = \frac{1}{2}(I_i + O_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(I_i - O_i)$$

$$A_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & -i \\ & i & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \quad A_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & i & \\ & & & 1 \\ -i & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}$$

$$B_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & -i & \\ & i & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}$$

$$B_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & & i & \\ & & & -1 \\ -i & & & \\ & -1 & & \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{bmatrix}$$

Wektory własne operatorów A_2 i B_2 są identyczne, ale z różnymi wartościami własnymi

	$ - + \rangle$	$ + + \rangle$	$ - - \rangle$	$ + - \rangle$	
A_2	$- \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2}$	$- \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2}$	
B_2	$+ \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2}$	$- \frac{1}{2}$	$- \frac{1}{2}$	
Wektor	0 0 -1 1	1 i 0 0	-1 i 0 0	0 0 -1 -1	x y z t

$$| - + \rangle = t - z,$$

$$| + + \rangle = x + iy,$$

$$| - - \rangle = -(x - iy)$$

$$| + - \rangle = -(z + t)$$

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 \quad (8)$$

$$[A_i, A_j] = i \varepsilon_{ijk} A_k$$

$$[B_i, B_j] = i \varepsilon_{ijk} B_k$$

$$[A_i, B_j] = 0 \quad \text{dla dowolnego } i \text{ i } j.$$

Grupa obrotów i przekł. Lorent

Przekształcenia infinitesymalne

Obrotowy wokół osi i o mały kąt $\delta\varphi$ lub przesłania o $\delta\omega$

$$(1 - i \cdot \delta\varphi \cdot I_i), (1 + \delta\omega \cdot O_i)$$

Obrotowy o skończony kąt φ .

$$\text{Niech } \varphi = n \cdot \delta\varphi \Rightarrow \delta\varphi = \frac{\varphi}{n}$$

$$(1 - i \delta\varphi \cdot I_i) \cdot \dots \cdot (1 - i \delta\varphi \cdot I_i) =$$

$$= \left(1 - i \frac{\varphi}{n} I_i\right)^n \quad \text{co w granicy}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\varphi}{n} I_i\right)^n = e^{-i \varphi I_i}$$

Postępując podobnie dla przekształceń Lorentza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega \cdot O_i}{n} \right)^n = e^{+\omega \cdot O_i}$$

$$O_i = x_i \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Pomiarowi zachodzi

$$O_i = A_i - B_i$$

$$I_i = A_i + B_i, \text{ a operatory}$$

A_i i B_j komutują ze sobą

$$e^{+\omega \cdot O_i} = e^{+\omega \cdot A_i} \cdot e^{-\omega \cdot B_i}$$

$$e^{-i\varphi \cdot I_i} = e^{-i\varphi \cdot A_i} \cdot e^{-i\varphi \cdot B_i}$$

Niech przestrzeń A będzie rozpięta przez wektory własne A_z , podobnie niech przestrzeń B będzie rozpięta przez wektory własne B_z

A	B	
$\omega \vec{n} \cdot \vec{A}$ e	$-\omega \vec{n} \cdot \vec{B}$ e	Lorentz
$-i\varphi \vec{n} \cdot \vec{A}$ e	$-i\varphi \vec{n} \cdot \vec{B}$ e	obrót przekład

gdzie \vec{n} wektor jednostkowy wzdłuż którego

$$\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$$

$$\vec{B} = [B_x, B_y, B_z]$$

dokonyjemy obrótu o kąt φ lub przekład o ω

1) Algebrę (Lie) nazwaną zbiór generatorów z operacją \cdot i $+$

Np. A_x, A_y, A_z

$$[A_i, A_j] = i \epsilon_{ijk} A_k$$

2) Reprezentacji ~~u~~ algebry nazwaną zbiór \hat{A}_i takich, że

małemu \circ wymiaru n

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{A}_k$$

(w przypadku danych brzo ogólnych)

3) Wektor własny pewnej macierzy (9')
 $\vec{n} \cdot \hat{A} |j, m\rangle$, \vec{n} wektor jednostkowy
 rozpinają przestrzeń wektorową
 o wymiarze n

4) Grupa nazywany zbiór G z
 działaniem grupowym

a) jeśli $a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$,

b) dla każdego a istnieje a^{-1} , $a \cdot a^{-1} = e$,

c) istnieje taki element e i dla
 każdego $g \in G$ $g \circ e = e \circ g = g$

d) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Emeryt Galois (ok 1830).

Transformacji Lorentza i

obrotu stanu

$|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle,$

stanu własne operatoru A_2 i B_2

$$A_2 |++\rangle = +\frac{1}{2} |++\rangle$$

$$A_2 |+-\rangle = +\frac{1}{2} |+-\rangle$$

$$A_2 |-+\rangle = -\frac{1}{2} |-+\rangle$$

$$A_2 |--\rangle = -\frac{1}{2} |--\rangle$$

Podobnie

$$B_2 |++\rangle = +\frac{1}{2} |++\rangle$$

$$B_2 |+-\rangle = -\frac{1}{2} |+-\rangle$$

$$B_2 |-+\rangle = +\frac{1}{2} |-+\rangle$$

$$B_2 |--\rangle = -\frac{1}{2} |--\rangle$$

Działaniu np. na stan $|++\rangle$

$$e^{i\varphi A_2} |++\rangle = (C+S) |++\rangle$$

$$e^{-i\varphi A_2} |++\rangle = e^{-\frac{i\varphi}{2}} |++\rangle$$

$$e^{i\varphi A_2} |++\rangle = \begin{bmatrix} C & -iS & & \\ iS & C & & \\ & & C & S \\ & & S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C+S \\ i(S+C) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (C+S) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\varphi A_2} |++\rangle = \begin{bmatrix} \tilde{C} & -\tilde{S} & & \\ \tilde{S} & \tilde{C} & & \\ & & \tilde{C} & -i\tilde{S} \\ & & i\tilde{S} & \tilde{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C} - i\tilde{S} \\ i(\tilde{C} - i\tilde{S}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{i\varphi}{2}} |++\rangle$$

$$C = \cosh\left(\frac{\varphi}{2}\right), S = \sinh\left(\frac{\varphi}{2}\right), \tilde{C} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \tilde{S} = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Działania operatorów A_i na
ilorazyn kartezjański

$A_i |++\rangle = |(A_i +) + \rangle$

$B_i |++\rangle = |+ (B_i +) \rangle$

$A_+ = A_x + i A_y$

$A_- = A_x - i A_y$

$A_+ |++\rangle = 0, A_+ |+-\rangle = 0, A_+ |-+\rangle = |++\rangle$

$A_+ |--\rangle = |+-\rangle$

$A_- |++\rangle = |-+\rangle, A_- |+-\rangle = |--\rangle, A_- |-+\rangle = 0$

$A_- |--\rangle = 0$

$B_+ |++\rangle = 0, B_+ |+-\rangle = |++\rangle,$

$B_+ |-+\rangle = 0, B_+ |--\rangle = |-+\rangle$

$B_- |++\rangle = |+-\rangle, B_- |+-\rangle = 0$

$B_- |-+\rangle = |--\rangle, B_- |--\rangle = 0$

Mozna uprositi pojedini
rozvariami uprovladajic

$$|+\rangle_A, |-\rangle_A, \text{ oraz } |+\rangle_B \text{ i } |-\rangle_B$$

$$A_+ |+\rangle = 0$$

$$A_+ |-\rangle = |+\rangle$$

$$A_- |+\rangle = |-\rangle$$

$$A_- |-\rangle = 0$$

zicli pnyjaci, zi $|+\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_x = \frac{1}{2} (A_+ + A_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_y = \frac{-i}{2} (A_+ - A_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Sumujic

$$A_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, A_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

up. wektory wlasne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

~~Obraz~~ Grupa przekształceń w $\vec{n} \cdot \vec{A}$.

$$-i \vec{n} \cdot \vec{A} \cdot \varphi$$

e, e

obrót przestrzeni, przekł. Lorentza

Postupuje podobni jak u
matrici A dostaji

$$B_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, B_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

up. vektor v rase $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e^{-i \vec{n} \cdot \vec{B} \varphi}, e^{-\omega \vec{n} \cdot \vec{B}}$$

obrot matriky, prekt. Lorentze

Wykład 3

(14)

Niech zadane będą trzy wektory

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} takie, że

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \quad \text{oraz}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}, \quad -a_j b_i + a_i b_j = \epsilon_{ijk} c_k$$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, \vec{A} - wektor matrycy

Możemy zachodzi

$$[\vec{a} \cdot \vec{A}, \vec{b} \cdot \vec{A}] = i \vec{c} \cdot \vec{A} \quad [A_i, A_j] = i \epsilon_{ijk} A_k$$

Dowód: $\sum_i a_i A_i \equiv a_i A_i = \vec{a} \cdot \vec{A}$

$$[a_i A_i, b_j A_j] =$$

$$a_i b_j [A_i, A_j] = a_i b_j \cdot i \cdot \epsilon_{ijk} A_k$$

$$= i (\epsilon_{ijk} a_i b_j) \cdot A_k = i c_k A_k \quad \square$$

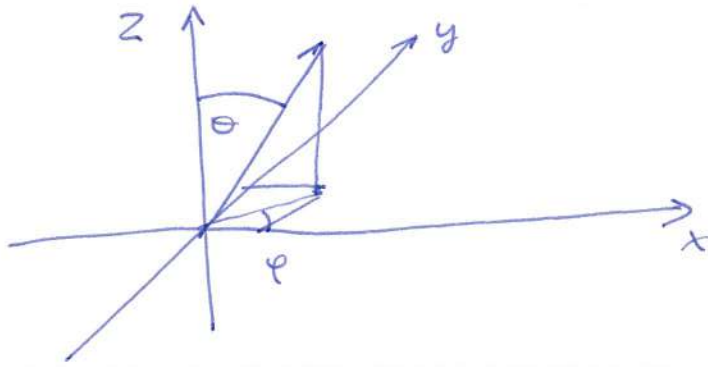
Przykład: Matryce

$\frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$, $\frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$, $\frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{\sigma}$, 6 matryce Pauli

tworzą reprezentację algebry Lie.

$$[\frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{\sigma}] = i \cdot \frac{1}{2} \cdot \vec{c} \cdot \vec{\sigma}$$

Zdefiniujmy wektor \vec{n}



$$n_x = \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$n_y = \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$n_z = \cos \theta$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Tr}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = 0$$

$$\text{Det}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$$

Wartości własne ~~matrycy~~ macierzy

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} & -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} & -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix}$$

Wtenczy zatem dwa wektory własne

$$\vec{e}_+ = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix} \quad \text{z wartością } +1$$

$$\vec{e}_- = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix} \quad \text{z wartością własną } -1$$

$$e^{-i\frac{\phi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \vec{e}_+ = e^{-i\frac{\phi}{2}} \vec{e}_+$$

$$e^{-i\frac{\phi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} \vec{e}_- = e^{i\frac{\phi}{2}} \vec{e}_-$$

Obrót wokół osi \vec{n} o kąt ϕ
 Uwaga: kąt ϕ jest różny od kąta φ

Podobnie dla transformacji: Lorentz (17)

$$e^{\frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = e_+ = e^{\frac{\omega}{2}} \quad e_+ = (c+s) e_+$$
$$e^{-\frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = e_- = e^{-\frac{\omega}{2}} \quad e_- = (c-s) e_-$$

$$\text{Ale } \frac{e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}}{2} + \frac{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}{2} = e^{\frac{\omega}{2}} =$$

$$= \cosh \frac{\omega}{2} + \sinh \frac{\omega}{2}$$

$$\frac{e^{+\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}{2} = e^{-\frac{\omega}{2}} =$$

$$= \cosh \frac{\omega}{2} - \sinh \frac{\omega}{2},$$

$$c = \cosh \frac{\omega}{2}$$
$$s = \sinh \frac{\omega}{2}$$

Ponadto zachodzi

$$e^{-i \frac{\phi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\phi}{2} - i \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$e^{\frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cosh \frac{\omega}{2} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sinh \frac{\omega}{2}$$

$$\text{gdzie } (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Własności spinorów

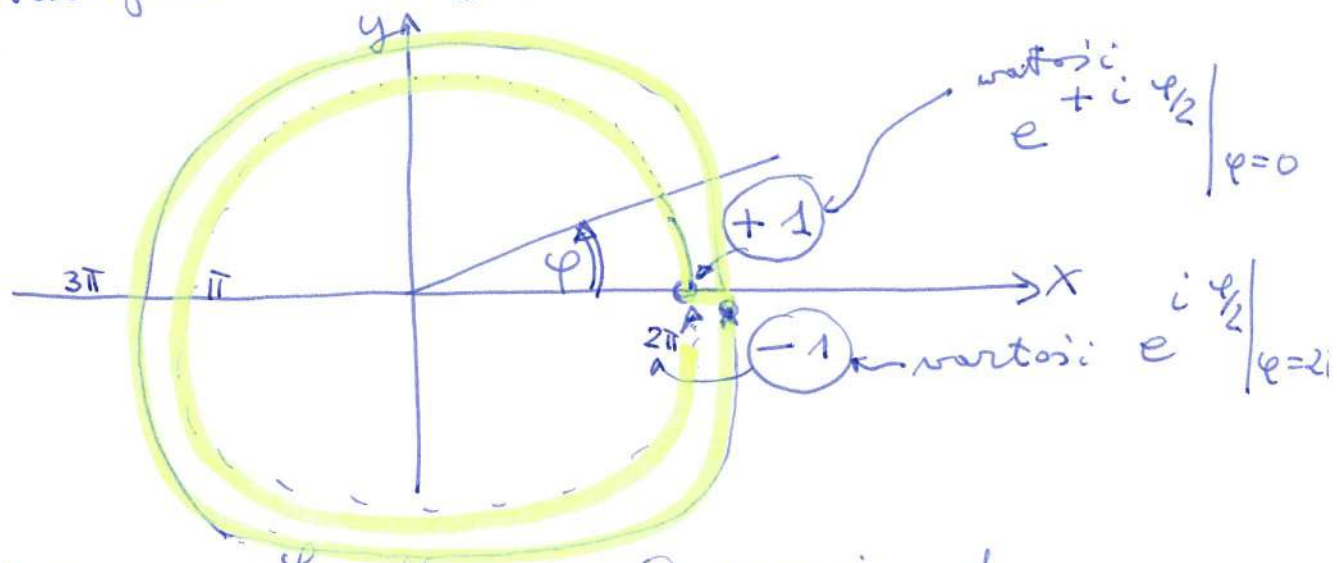
Niech $\Theta = \frac{\pi}{2}$ wówczas

$$e_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \\ e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$e_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \\ e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$e^{\pm i\varphi/2} = \cos \frac{\varphi}{2} \pm i \sin \frac{\varphi}{2}$$

Rozwini funkcji $e^{\pm i\varphi/2}$ opisują krąg w przestrzeni (x, y)



wartości $\cos \frac{\varphi}{2}$ dla $\varphi = 0$ wynosi 1.

Po pełnym okresie 0 2π wartości

$$\cos \frac{2\pi}{2} = -1$$

dla $\varphi = 0$ i $\varphi = 2\pi$

Wniosek: pojawia się nieciągłość. Usunięcie nieciągłości wymaga krętu $[0, 4\pi]$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\tilde{\tau}} \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

Diagram illustrating Doppler shift for sound waves. A source moves to the right with velocity v . The wave speed is c . The observed frequency ω' is shown to be lower (redshift) for waves moving away from the source and higher (blueshift) for waves moving towards the source.

B) Związek pomiędzy ω i przesłaniem v

$$x' = x + \beta \omega t$$

$$t' = t + \beta \omega \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \left[1 + \beta \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \beta \omega \\ +\beta \omega & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

$$e^{+\omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \cosh \omega + \sinh \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(\omega) & + \sinh(\omega) \\ + \sinh(\omega) & \cosh(\omega) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cosh(\omega) + t \cdot \sinh(\omega)$$

$$t' = t \cdot \cosh(\omega) + x \cdot \sinh(\omega)$$

stąd

$$\cosh(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\sinh(\omega) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

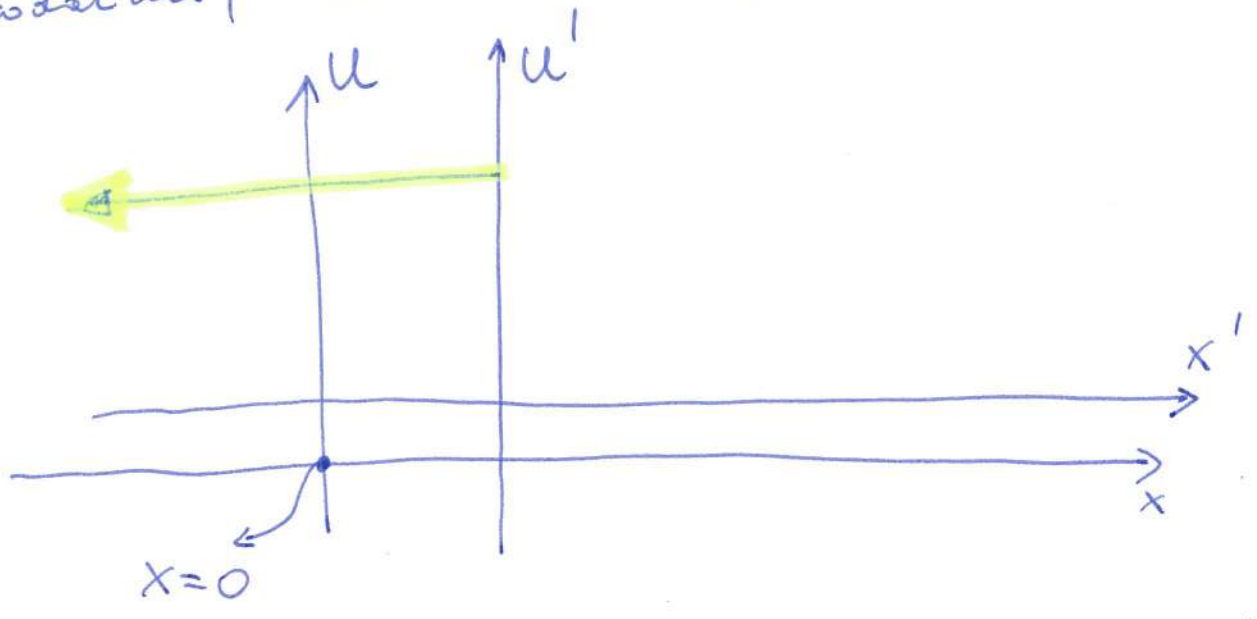
Uwaga odnośnie transformacji:

Lorentza.

W niniejszych notatkach
przyjeto, ze $v > 0$ dla
transformacji:

$$\begin{cases} x' = x + \beta v \cdot t \\ t' = t + \beta v \cdot x \end{cases}$$

Widac, ze punkt $x=0$ z uptywion
czasem t w układzie U' wartosci
dodatni, co oznacza, ze



U' porusza sie w kierunku $-x$, jak
we wyniku.

Zachodzi

$$\cosh(w) = \cosh\left(\frac{w}{2}\right) + \sinh\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$\sinh(w) = 2 \sinh\left(\frac{w}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{w}{2}\right)$$

oznaczymy $c = \cosh\left(\frac{w}{2}\right)$, $s = \sinh\left(\frac{w}{2}\right)$

$$\begin{cases} c^2 + s^2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ 2cs = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$$

$$c^2 + s^2 + 2cs = (c+s)^2 = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

$$c^2 + s^2 - 2cs = (c-s)^2 = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

Sumujemy

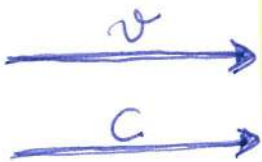
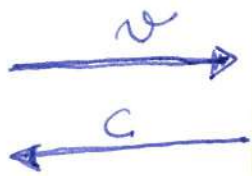
$$c+s = \sqrt{\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}}$$

$$(c-s) = \sqrt{\sqrt{\frac{1-v}{1+v}}}$$

$$c = \cosh\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$s = \sinh\left(\frac{w}{2}\right)$$

Doppler



„pierzwiastkowy” efekt Dopplera dla spinorów o wymiarze 2

Analiza prętkności A i B.

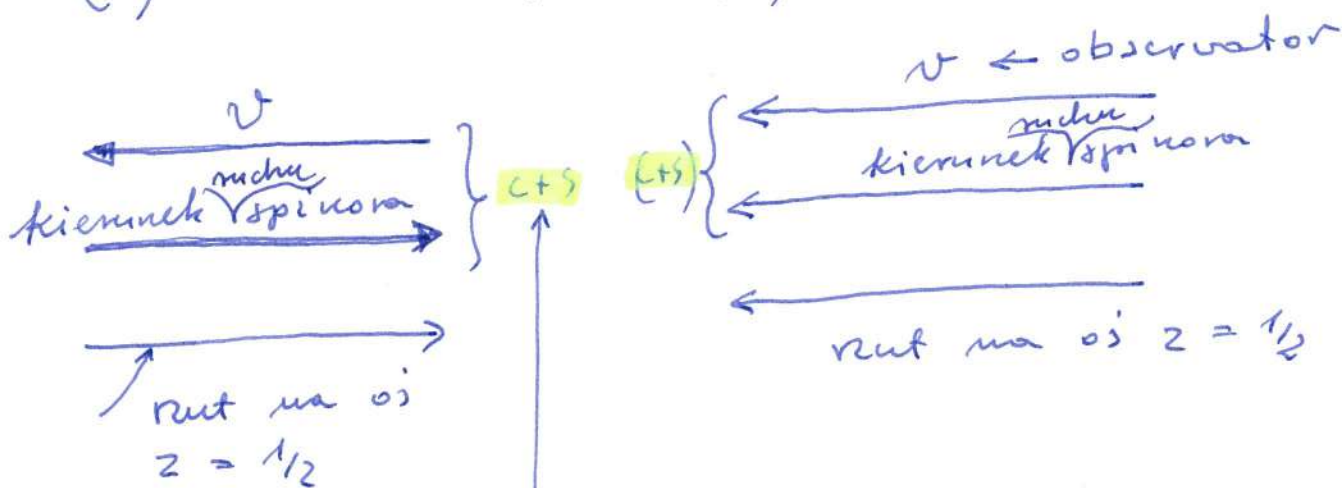
(22)

a) w prętkności A transformacji spinora
 gdy obserwator porusza się wzdłuż osi z
 ma postać

$$e^{+\frac{\omega}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c+s & 0 \\ 0 & c-s \end{bmatrix}$$

$$c = \text{ch } \frac{\omega}{2}, \quad s = \text{sh } \frac{\omega}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (c+s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow (c-s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



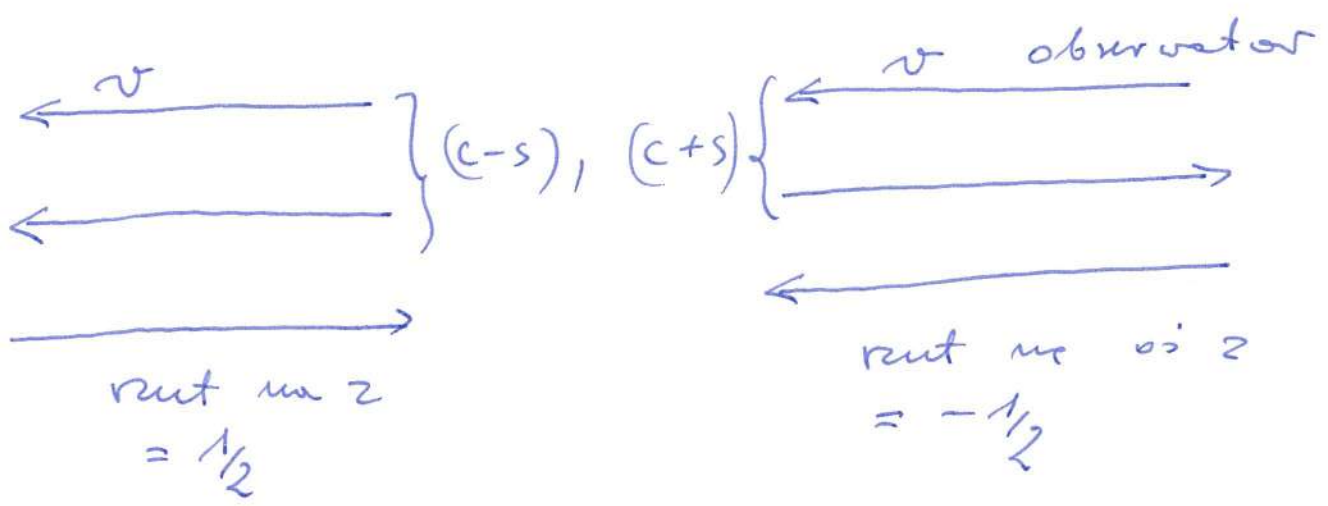
"pierwiastkowy" efekt Dopplera

Wniosek: w A kierunek pomiaru nie
 spinora jest zgodny z jego rotacją
 momentu pędu na osi z.

b) w przestrzeni B transformacji me parci

$$e^{-\frac{5}{2}t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-s & 0 \\ 0 & c+s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (c-s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow (c+s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Wniosek: w B kierunku pomiaru się, jest precyzyjnie do rotacji mom. pędu w poziomie z. to straszyć dlatego równania

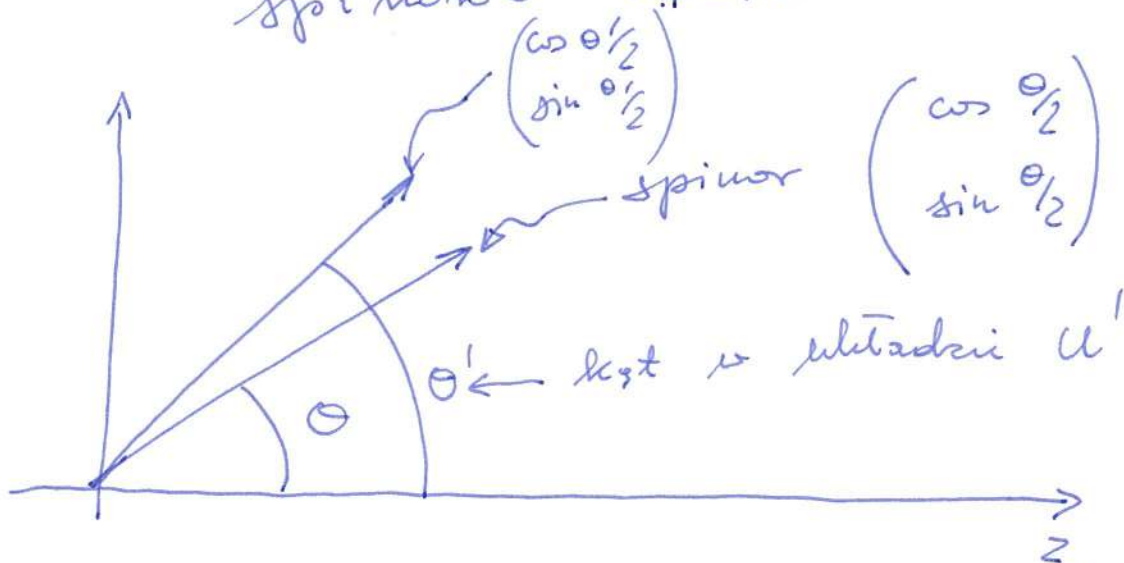
$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \omega_+ = + \omega_+$	$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \omega_- = - \omega_-$
--	--

Równania Weyla

Prekretanji Lorentza dlp

(24)

spinor ψ $w \pm wA$.



gledi u' pomra ni v kicrunlu
 $+z$ ravnini $w < 0$ i transformaciji

$$\begin{pmatrix} c-s & 0 \\ 0 & c+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c-s) \cos(\theta/2) \\ (c+s) \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos \theta'/2 \\ \sin \theta'/2 \end{bmatrix}$$

stop vidai, i

$$\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} = \frac{(c-s) \sin \theta/2}{(c+s) \cos \theta/2}$$

z trigonometrii vidamo, i

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Zatem

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{2 \cdot \frac{(c-s) \sin \theta/2}{(c+s) \cos \theta/2}}{1 - \left(\frac{(c-s) \sin \theta/2}{(c+s) \cos \theta/2} \right)^2} =$$

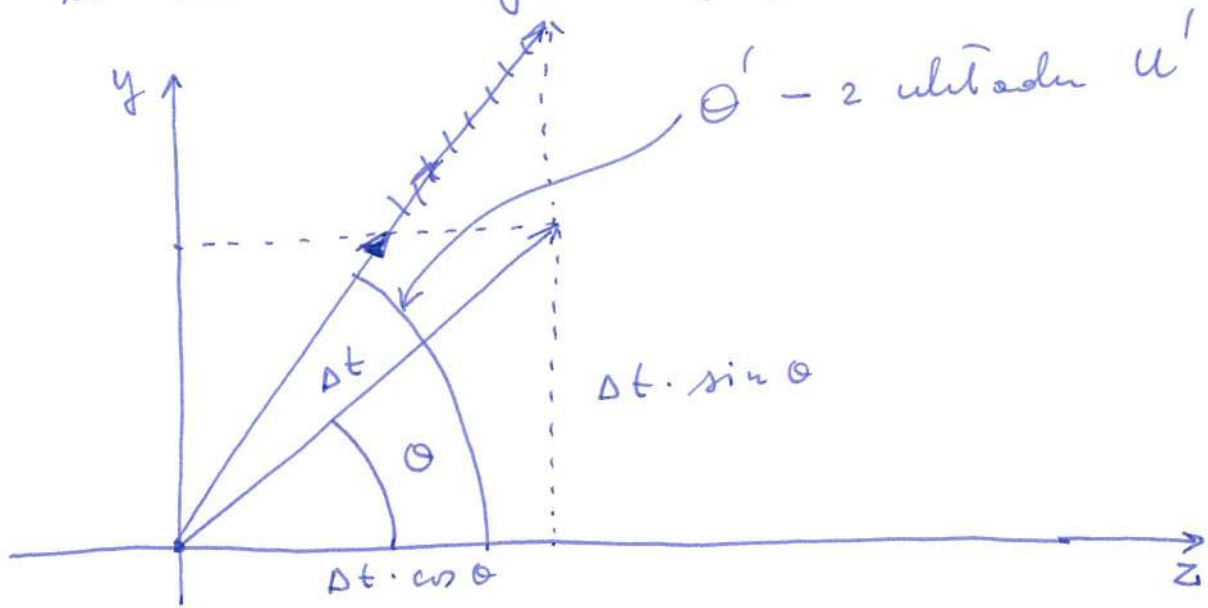
$$= \frac{2(c^2 - s^2) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{(c+s)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - (c-s)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} =$$

Also $\begin{cases} c^2 - s^2 = 1 \\ c^2 + s^2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ 2cs = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}, \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$

$$= \frac{\sin \theta}{(c^2 + s^2) (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2cs (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\frac{\cos \theta}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}} = \frac{\sin \theta \sqrt{1-v^2}}{\cos \theta + v}$$

Zmiana kąta światła
w układzie poruszającym się u'



Niech w układzie u światło porusza się pod kątem θ .

$$t' = \frac{t + v \cdot z}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad z' = \frac{z + v t}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y$$

Niech w układzie u światło przechodzi przez dwa punkty (t, y, z)

	u	u'
1	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$
2	$(\Delta t, \Delta t \cdot \sin \theta, \Delta t \cdot \cos \theta)$	$(\frac{\Delta t + v \Delta t \cos \theta}{\sqrt{1 - v^2}}, \Delta t \sin \theta, \frac{\Delta t \cdot \cos \theta + v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2}})$

Zachodzi

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{\Delta t \cdot \sin \Theta}{\frac{\Delta t \cos \Theta + v \Delta t}{\sqrt{1-v^2}}} =$$

$$= \frac{\sin \Theta \cdot \sqrt{1-v^2}}{\cos \Theta + v}$$

Wniosek: transformacji Lorentza pomiaru
 dla spinora i światła jest

identyczna, co świadczy, że obiekt
 reprezent. ^{przez} spinor "porusza" się z prędkością

c.

Wstęp

Po wprowadzeniu macierzy 4×4
 A_i i B_i , działających w przestrzeni
 (x, y, z, t) ustaliliśmy, iż macierze
 A_2 i B_2 mają wektory własne te
 same, ale z różnymi wartościami
 własnymi, oznaczone znakiem wartości
 własnej

$$|++\rangle = x + iy, |--\rangle = -(x - iy)$$

$$|+-\rangle = t - z, |+-\rangle = -(z + t)$$

$$\text{Np: } A_z |+-\rangle = -\frac{1}{2} |+-\rangle$$

Skonstruowaliśmy macierze 4×4

$$A_p = A_x + iA_y, \quad A_m = A_x - iA_y$$

oraz

$$B_p = B_x + iA_y, \quad B_m = B_x - iB_y$$

Badając działaniami

$$A_p |+-\rangle = 0, \quad A_p |++\rangle = 0, \quad A_p |--\rangle = |++\rangle, \quad A_p |+-\rangle = |+-\rangle$$

$$A_p |+-\rangle = |+-\rangle$$

Wniosek: macierz A_p w działaniu
na stany własne zmienia znak

$$A_p: \begin{aligned} |+\rangle &\longrightarrow |+\rangle \\ |+\rangle &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Podobnie

$$A_m |+\rangle = |-\rangle, \quad A_m |+\rangle = |-\rangle$$

$$A_m |-\rangle = 0, \quad A_m |-\rangle = 0$$

$$A_m: \begin{aligned} |+\rangle &\longrightarrow |-\rangle \\ |-\rangle &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Mozna wprowadzić reprezentantów

$|+\rangle_A, |-\rangle_A$ i zdefiniować

$$A_p |+\rangle_A = 0, \quad A_p |-\rangle_A = |+\rangle_A$$

$$A_m |+\rangle_A = |-\rangle_A, \quad A_m |-\rangle_A = 0$$

ziceli oznaczeni przez

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |+\rangle_A, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |-\rangle_A \quad \text{to}$$

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_x = \frac{1}{2} (A_p + A_m) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_y = \frac{i}{2}(A_m - A_p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$A_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Podobnie można postąpić dla reprezentantów $|+\rangle_B \rightarrow \{|++\rangle, |+-\rangle\}$
 $|-\rangle_B \rightarrow \{|--\rangle, |+-\rangle\}$

Dostaję dwa przestrzenie

I) $A_x = \frac{1}{2} \sigma_x, A_y = \frac{1}{2} \sigma_y, A_z = \frac{1}{2} \sigma_z$

wektory własne np. A_z $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

oraz grupy przekształceń: obroty i Lorentz
 $e^{-i \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \varphi}, e^{+ \frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$

wskaz kierunek \vec{n} - wektor normalny.

II) $B_x = \frac{1}{2} \sigma_x, B_y = \frac{1}{2} \sigma_y, A_z = \frac{1}{2} \sigma_z$

wektory własne np: B_z $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

oraz grupy przekształceń
 $e^{-i \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \varphi}, e^{- \frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$

działających na wektory

Udalo ni zapisati (x, y, z, t) (31)
jako kombinaciji

$$|+\rangle_A |+\rangle_B, |+\rangle_A |-\rangle_B, |-\rangle_A |+\rangle_B \text{ i}$$

$$|-\rangle_A |-\rangle_B, \text{ cyli wynosi}$$

4-vektor jako ilocyn kartezjański
spinorów z pierścieni A i B.

Badami własności spinorów przy
prekntataciach Lorentza pokazują,
 \Rightarrow że "poruszają" się one z prędkością
c oraz, że

\Rightarrow istnieją składowości spinorów

\Rightarrow w pierścieni A prawoskrętne

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \omega_+ = + \omega_+,$$

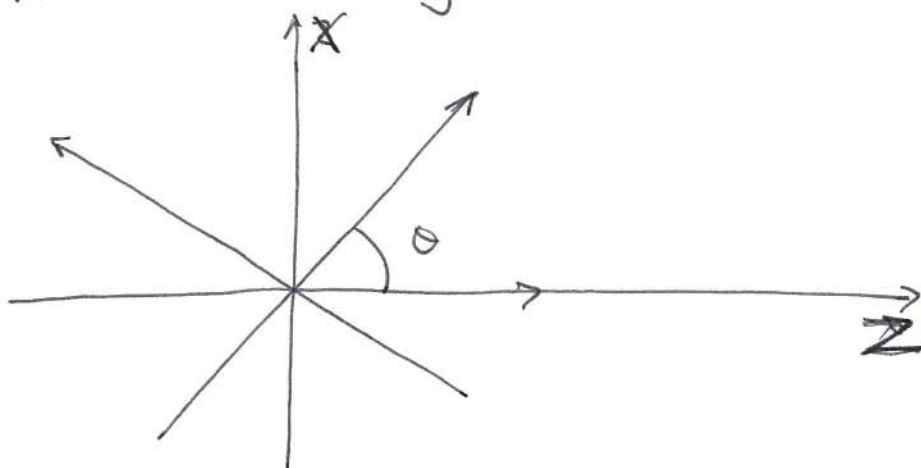
\Rightarrow w pierścieni B lewoskrętne

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \omega_- = - \omega_-.$$

Prüfung

(31)

W. pnestnemi A, B obrót spinaru
wokół osi y o kąt θ



Macierz obrotu $\cos \frac{\theta}{2} - i \sigma_y \sin \frac{\theta}{2} =$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Po zadzieleniu up $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|+\rangle' = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

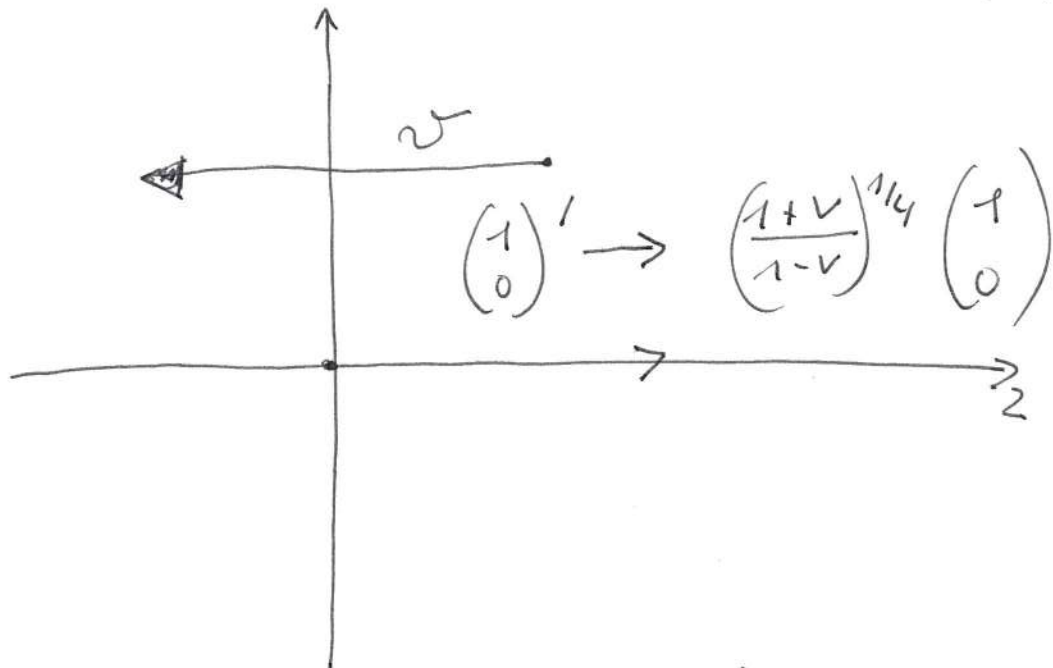
$$= \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

$$|+\rangle' = \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle$$

Transformasi Lorentz

31''

$$A) e^{\frac{\omega}{2} \sigma_2} = \begin{pmatrix} c + s & 0 \\ 0 & c - s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{1/4} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{1/4} \end{pmatrix}$$



$$B) e^{-\frac{\omega}{2} \sigma_2} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{1/4} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{1/4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}' \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1-v}{1+v} \end{pmatrix}^{1/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Konstrukcja reprezentacji w przestrzeni A i B

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dla ustalenia uwagi będy rozważać
przestrzeń A. Najprostszą reprezentacją

$$A_i = \frac{1}{2} \sigma_i.$$

Zachodzi

~~Wzrost~~

$$A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~Wzrost~~ Oznaczenia

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utworzyć stan iloczynowy 0

p plusach i m minusach

$$|p, m\rangle = \cancel{S} = N \cdot \overbrace{+++++\dots}^p \overbrace{-----}^m \rangle$$

gdzie znak S oznacza sumę wszystkich
możliwych permutacji: + i -, N - norma

$$N_p: S|+-\rangle = |+-\rangle + |-+\rangle$$

$$S|++-\rangle = |++-\rangle + |+-+\rangle + |-++\rangle$$

→ ile wyrazów zawiera suma dla $|p, m\rangle$

→ Odp: $\frac{(p+m)!}{p! m!}$, $(p+m)!$ ilości permutacji
zbioru $p+m$ elementów

Myśli $\langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1$ to

$$N = \sqrt{\frac{p! m!}{(p+m)!}}$$

Operator (i- to składowa)

$$A_i = \frac{1}{2} \left[\sigma_i^1 + \sigma_i^2 + \dots + \sigma_{p+m}^i \right]$$

Działania operatora A_i na stan $|p, m\rangle$. Np dla $p=2, m=1$:

$$A_z |++-\rangle = \frac{1}{2} (\sigma_x^{-1} + \sigma_z^2 + \sigma_z^3) |++-\rangle$$

⇒

$$= \frac{1}{2} (+1 + 1 - 1) |++-\rangle$$

$$= \frac{1}{2} |++-\rangle$$

Widzi, że ogólnie

$$A_z |p, m\rangle = \frac{p-m}{2} |p, m\rangle$$

Obliczy $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 =$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\sigma_x^1 + \dots + \sigma_x^{p+m} \right)^2 + \left(\sigma_y^1 + \dots + \sigma_y^{p+m} \right)^2 + \left(\sigma_z^1 + \dots + \sigma_z^{p+m} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\vec{\sigma}^1 + \vec{\sigma}^2 + \dots + \vec{\sigma}^{p+m} \right]^2 =$$

$$\sigma_i^2 = 1$$

$$= \frac{1}{4} \left[3 \cdot (p+m) + \sum_{i \neq j} \vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j \right]$$

Dla dowolnych $i \neq j$

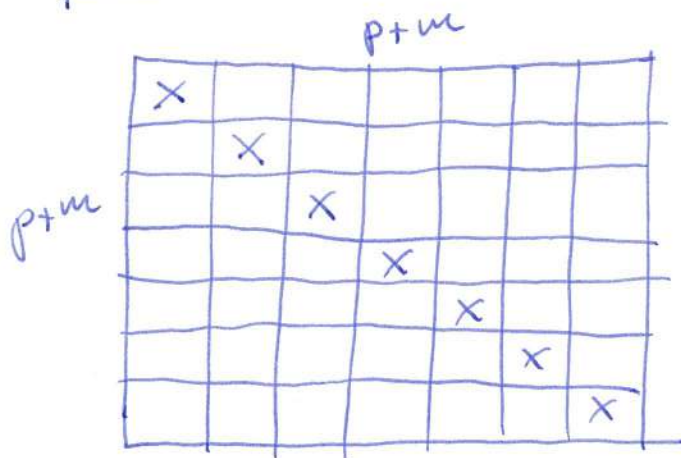
$$\vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j = \sigma_x^i \sigma_x^j + \sigma_y^i \sigma_y^j + \sigma_z^i \sigma_z^j$$

$$\begin{aligned} \sigma_x |+\rangle &= |+\rangle, & \sigma_y |+\rangle &= i |-\rangle, & \sigma_z |+\rangle &= + |+\rangle \\ \sigma_x |-\rangle &= |-\rangle, & \sigma_y |-\rangle &= -i |+\rangle, & \sigma_z |-\rangle &= - |-\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j |++\rangle &= |++\rangle \\ \vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j |+-\rangle &= 2 |-\rangle - |+-\rangle \\ \vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j |-+\rangle &= 2 |+\rangle - |-+\rangle \\ \vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j |--\rangle &= |--\rangle \end{aligned}$$

Można to streścić

$$\vec{\sigma}^i \cdot \vec{\sigma}^j = 2 P_{ij} - 1$$



Ilość pustych
kratek w kwadracie
o boku $p+m$

$$= (p+m)^2 - (p+m) = (p+m)(p+m-1)$$

$$P_{ij} |p, m\rangle = |p, m\rangle$$

$$A^2 = \frac{1}{4} [3(p+m) + (p+m)(p+m-1)]$$

(34')

$$= \frac{1}{4} [(p+m) [p+m+2]] = \left(\frac{p+m}{2}\right) \left(\frac{p+m}{2} + 1\right)$$

"Spin" wynosi $\frac{p+m}{2}$.

$$A^2 |p, m\rangle = \left(\frac{p+m}{2}\right) \left(\frac{p+m}{2} + 1\right) |p, m\rangle$$

Jeżeli sumy $\frac{p+m}{2} = I$

$$\frac{p-m}{2} = M$$

Odnajemy proste przyporządkowanie

$$\begin{aligned} p &= I + M \\ m &= I - M \end{aligned}$$

$$A_2 |I, M\rangle = M |I, M\rangle$$

$$A^2 |I, M\rangle = I(I+1) |I, M\rangle$$

Zdefiniuj:

$$\begin{cases} A_+ = A_x + iA_y \\ A_- = A_x - iA_y \end{cases}$$

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_+ +\rangle = 0$	$\sigma_- +\rangle = -\rangle$
$\sigma_+ -\rangle = +\rangle$	$\sigma_- -\rangle = 0$

$$A_+ = \cancel{\sigma_+} (\sigma_+^{p-1} + \dots + \sigma_+^{p+m})$$

Ile wynosi

$$A_+ |p, m\rangle ?$$

Np: dla $I=1$ $p=1, m=1$:

$$\cancel{\sigma_+} (\sigma_+^1 + \sigma_+^2) |++\rangle = 0$$

$$\cancel{\sigma_+} (\sigma_+^1 + \sigma_+^2) \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} = \cancel{\sigma_+} \frac{|++\rangle + |++\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \cancel{\sigma_+} |++\rangle \cdot \sqrt{2}$$

$$(\sigma_+^1 + \sigma_+^2) |--\rangle = \left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2}$$

Zachodzą zatem

$$A_+ |1,0\rangle = \sqrt{2} |1,1\rangle$$

$$A_+ |1,1\rangle = 0$$

$$A_+ |1,-1\rangle = \sqrt{2} |1,0\rangle$$

Podobnie można dostać dla A_-

Konstrukcja reprezentacji:

$$|++\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |--\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_+ = \begin{bmatrix} & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & \\ & & \sqrt{2} & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad A_- = \begin{bmatrix} & & \\ \sqrt{2} & & \\ & & \\ & & \sqrt{2} & \end{bmatrix}$$

$$A_x = \begin{bmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}$$

$$A_y = \begin{bmatrix} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ & \frac{i}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Pytanie: działanie operatora A_+ $|2, 3\rangle$

$$A_+ = (\sigma_+^1 + \sigma_+^2 + \sigma_+^3 + \sigma_+^4 + \sigma_+^5) | \begin{matrix} + & - & - & + & - \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \end{matrix} \rangle$$

$$= | + \oplus - + - \rangle + | + - \oplus + - \rangle + | + - - + \oplus \rangle$$

Każdy stan został wielokrotny
3 (m) razy.

stan (p, m) jest $\frac{(p+m)!}{p! m!} p^0$

m wielokrotności

$$m \cdot \frac{(p+m)!}{p! m!} = \frac{(p+m)!}{p! (m-1)!}$$

Ali $A_+ |p, m\rangle \rightarrow |p+1, m-1\rangle$

i stavu povinno biti

$$\frac{(p+m)!}{p! (m-1)!} = (p+1) \frac{(p+m)!}{(p+1)! (m-1)!}$$

$$A_+ |p, m\rangle = (p+1) \sqrt{\frac{p! m!}{(p+m)!}} \mathcal{S} \left| \overbrace{+++ \dots}^{p+1} \overbrace{--- \dots}^{m-1} \right\rangle$$

$$= (p+1) \cdot \sqrt{\frac{(p+1)! (m-1)! m}{(p+1) (p+m)!}} \mathcal{S} \left| \overbrace{+++ \dots}^{p+1} \overbrace{--- \dots}^{m-1} \right\rangle$$

$$= \sqrt{(p+1) \cdot m} |p+1, m-1\rangle$$

$$A_- |p, m\rangle = \sqrt{(m+1) \cdot p} |p-1, m+1\rangle$$

po prepisaniu $p = I+M, m = (I-M)$

$$A_+ |I, M\rangle = \sqrt{(I+M+1) (I-M)} |I, M+1\rangle$$

Wstęp

Można zdefiniować reprezentację
 zbudowaną z $p+m$ reprezentacji: podobnych
 typu A lub B o wymiarze 2.

$$J_i = \frac{1}{2} \left(\sigma_i^1 + \dots + \sigma_{\frac{p+m}{2}}^{p+m} \right), \quad [J_x, J_y] = i J_z$$

$$\text{stan } |p, m\rangle = \sqrt{\frac{p! m!}{(p+m)!}} \sum \left| \begin{array}{c} \underbrace{+ \dots +}_p \underbrace{- \dots -}_m \end{array} \right\rangle$$

operator S - symetryzuje stan

$$\text{np. } S |+-\rangle = |+-\rangle + |-+\rangle$$

Działami operatora o numerze k np
 k -te składnik k -te miejsce

$$\left(\sigma_i^1 + \dots + \sigma_i^k + \dots + \sigma_i^{p+m} \right) \left| \begin{array}{c} + - + - \dots \textcircled{+} - - - + \end{array} \right\rangle$$

$$J^2 |p, m\rangle = \left(\frac{p+m}{2} + 1 \right) \left(\frac{p+m}{2} \right) |p, m\rangle$$

$$J_z |p, m\rangle = \frac{p-m}{2} |p, m\rangle$$

Definiujemy $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$

$$J_+ = J_x + i J_y$$

$$J_- = J_x - i J_y$$

$$J_+ |p, m\rangle = \sqrt{(p+1) \cdot m} |p+1, m-1\rangle$$

$$J_- |p, m\rangle = \sqrt{(m+1) \cdot p} |p-1, m+1\rangle$$

Grupa przekształceń i jej
obrotami 142

obrotu $e^{-i\varphi \vec{n} \cdot \vec{J}} = \prod_{k=1}^{p+m} e^{-i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}^k} \leftarrow \text{dla } A: B$

Lorentz $e^{\pm i\omega \vec{n} \cdot \vec{J}} = \prod_{k=1}^{p+m} e^{\pm i\frac{\omega}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}^k}$

+ - dla przestrzeni A
- dla przestrzeni B

Uwaga: p i m związane są ze spinem I i jego ruten relacjami

$$I = \frac{p+m}{2}, \quad M = \frac{p-m}{2}$$

Przykład:

Niech dane będzie reprezentacja przestrzeni A o wymiarze 2. i stany $|+\rangle, |-\rangle$

Utwórz stany

$$|++\rangle, \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}, |--\rangle.$$

Wg powyższej teorii transformacji ni one jak $|1, 2\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle.$

Rozważ obrót wokół osi y o kąt θ

wokół osi y $e^{-i\frac{\theta}{2} \sigma_y} = e^{\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \cos \frac{\theta}{2} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2}$

označajje: $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (43)

transformaciji

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}' \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

lub $|+\rangle' = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$

$$|-\rangle' = \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle$$

tato vidai, $c = \cos \frac{\theta}{2}$, $s = \sin \frac{\theta}{2}$

$$|++\rangle' = (c|+\rangle + s|-\rangle)(c|+\rangle + s|-\rangle) =$$

$$= c^2 |++\rangle + \sqrt{2} sc \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} + s^2 |--\rangle$$

$$\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{(c|+\rangle + s|-\rangle)(c|-\rangle - s|+\rangle) + \text{sym}}{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} sc |++\rangle + \frac{(c^2 - s^2)(|+-\rangle + |-+\rangle)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} sc |--\rangle$$

$$|--\rangle = (c|-\rangle - s|+\rangle)(c|-\rangle - s|+\rangle) =$$

$$= c^2 |--\rangle - \sqrt{2} sc \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} + s^2 |++\rangle$$

$$2sc = \sin \theta$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta = c^2 - s^2$$

$$c^2 - (1 - c^2) = 2c^2 - 1 = \cos \theta \Rightarrow c^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

over $\omega^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$|1,1\rangle' = \frac{1 + \cos \theta}{2} |1,1\rangle + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1 - \cos \theta}{2} |1,-1\rangle$

$|1,0\rangle' = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} |1,1\rangle + \cos \theta \cdot |1,0\rangle + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} |1,-1\rangle$

$|1,-1\rangle' = |1,+1\rangle \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right) - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1 + \cos \theta}{2} |1,-1\rangle$

$|1,1\rangle' \quad |1,0\rangle' \quad |1,-1\rangle'$

$|1,1\rangle'$
 $|1,0\rangle'$
 $|1,-1\rangle'$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1 + \cos \theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1 - \cos \theta}{2} \\
 +\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\
 \frac{1 - \cos \theta}{2} & +\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1 + \cos \theta}{2}
 \end{bmatrix}$$

$-i\theta J_y$
 $e = e^{-i\theta J_y}$

$$\begin{bmatrix}
 & -\frac{i}{\hbar} & \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} & & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & \frac{i}{\hbar} &
 \end{bmatrix}$$

\equiv

$$\left(\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A,B}' = \left(\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A,B}$$

Niezmiennik w grupie wygenerowanej przez
 pełną grupę - obroty i Lorentz
 zerości w punkcie A i B

$$A_- |I, M\rangle = \sqrt{(I-M+1)(I+M)} |I, M-1\rangle$$

Równania Maxwella ($c=1$)

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = + \frac{\partial E}{\partial t}$$

Przepisy ∇ składowych x, y, z

$$(\nabla \times E)_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y$$

$$(\nabla \times E)_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z$$

$$(\nabla \times E)_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x$$

lub w postaci macierowej

$$\nabla \times E = \begin{bmatrix} & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_x + \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{bmatrix} \partial_y + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_z \right\} \begin{bmatrix} E \\ E \\ E \end{bmatrix}$$

Wprowadzamy 3 operatory

$$\mathcal{D}_x = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_y = i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_z = i \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{y}_x, \vec{y}_y] = i \vec{y}_z$$

$$\vec{y} \cdot \nabla \vec{E} = -i \vec{B}$$

$$\vec{y} \cdot \nabla \vec{B} = +i \vec{E}$$

Niech $\vec{B} = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{B}_0$

$$\vec{y} \cdot \vec{k} E_0 = i B_0 \omega$$

$$\vec{y} \cdot \vec{k} B_0 = -i E_0 \omega$$

dołączyc

i odjmujsc str.

jesli

$$\vec{k} = \omega \cdot \vec{n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{y} (E_0 + i B_0) = + (E_0 + i B_0) \\ \vec{n} \cdot \vec{y} (E_0 - i B_0) = - (E_0 - i B_0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \cdot (E_0 + i B_0) = 0 \\ \vec{n} \cdot (E_0 - i B_0) = 0 \end{array} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{div } E = 0 \\ \text{div } B = 0 \end{array}$$

Przeprawy $n_+ = E_0 + i B_0$

Równania $n_- = E_0 - i B_0$
Maxwelle

$$\vec{n} \cdot \vec{y} n_+ = + n_+$$

$$\vec{n} \cdot \vec{y} n_- = - n_-$$

A

B

\vec{n} - wektor 3-wymiarowy określający kierunek propagacji!

Reguly transformacijne

$$\vec{E} \pm i \vec{B}$$

$$E_i = F_{it} \quad i = 1, 2, 3$$

$$B_i = -\epsilon_{ijk} F_{jk}$$

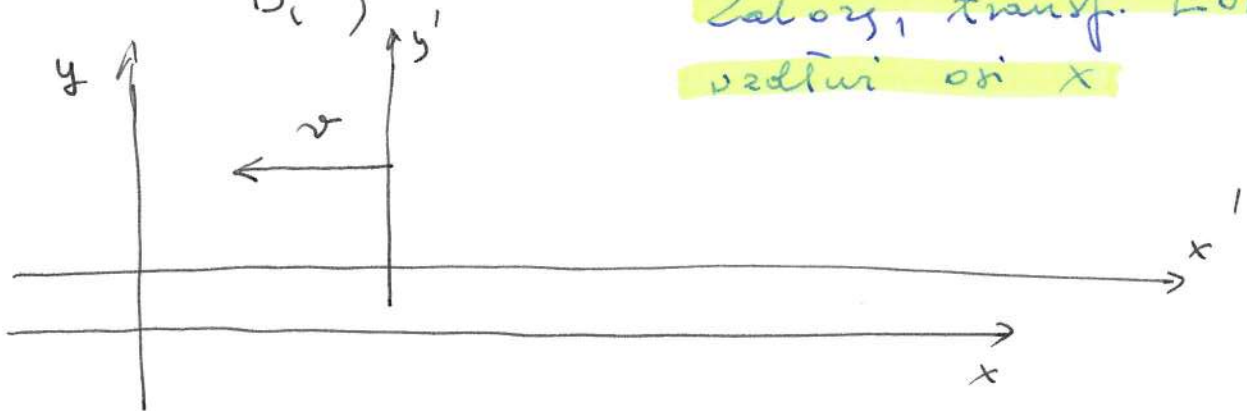
$$B_x = F_{zy}, B_y = F_{xz}, B_z = F_{yx}$$

gdruj $F_{ij} = -F_{ji}$ jest antisymetričan tenzor, a oduvijek je transformacija

$$F_{ij} = A_i B_j - A_j B_i$$

A_i, B_i 4-vektori.

Zato je transformacija Lorentza vezana za x



$$A_x' = \frac{A_x + v A_t}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$B_x' = \frac{B_x + v B_t}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$A_t' = \frac{A_t + v A_x}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$B_t' = \frac{B_t + v B_x}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$A_y' = A_y,$$

$$B_y' = B_y$$

$$A_z' = A_z,$$

$$B_z' = B_z$$

2)

$$1) F'_{xt} = \frac{1}{1-v^2} \left[(A_x + v A_t)(B_t + v B_x) - (A_t + v A_x)(B_x + v B_t) \right] \quad (46)$$

$$= \frac{1}{(1-v^2)} \left[(A_x B_t - A_t B_x)(1-v^2) \right] = F_{xt}$$

$$2) F'_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[(A_x + v A_t) B_y - A_y (B_x + v B_t) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[(A_x B_y - A_y B_x) + v (A_t B_y - A_y B_t) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[F_{xy} + v F_{ty} \right]$$

$$3) F'_{xz} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[F_{xz} + v F_{tz} \right]$$

$$4) F'_{ty} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[(A_t + v A_x) B_y - A_y (B_t + v B_x) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[F_{ty} + v F_{xy} \right]$$

$$5) F'_{tz} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[F_{tz} + v F_{xz} \right]$$

$$6) F'_{yz} = F_{yz}$$

3) Wniosek: jeśli ruch odbywa się w kierunku $-x$

$$v F'_{xt} = F_{xt}, \quad F'_{yz} = F_{yz}$$

$$v F'_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (F_{xy} + v F_{ty}), \quad F'_{tz} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [F_{tz} + v F_{xz}]$$

$$F'_{xz} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (F_{xz} + v F_{tz}), \quad F'_{ty} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [F_{ty} + v F_{xy}]$$

Przeprawy w postaci \vec{E}, \vec{B}

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x$$

$$B'_z = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (B_z + v E_y), \quad E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [E_z - v B_y]$$

$$B'_y = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (B_y - v E_z), \quad E'_y = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [E_y + v B_z]$$

$$(E_x + i B_x)' = (E_x + i B_x)$$

$$(E_z + i B_z)' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[(E_z + i B_z) + i v [E_y + i B_y] \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[(E_z + i B_z) + i v [E_y + i B_y] \right]$$

$$(E_y + i B_y)' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left[(E_y + i B_y) - i v [E_z + i B_z] \right]$$

Wniosek: transformacji Lorentza przekształca składowe n_+ tylko w siebie (mi v n_-)

(4)

Transformacja Lorentzowska dla
prędkości v wzdłuż osi x

(48)

$$e^{+i\omega t} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \omega & -i \sinh \omega \\ 0 & i \sinh \omega & \cosh \omega \end{bmatrix} \vec{E} + i \vec{B}$$

Dowód na następnej stronie

Macierz to działa na wektor

$$\begin{pmatrix} E_x + iB_x \\ E_y + iB_y \\ E_z + iB_z \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} E_x + iB_x \\ (E_y + iB_y) \cosh \omega - i \sinh \omega (E_z + iB_z) \\ i \sinh \omega (E_y + iB_y) + \cosh \omega (E_z + iB_z) \end{bmatrix}$$

Wniosek: Klasyczne przekształcenie dla transformacji Lorentzowskiej prowadzi do identycznych rezultatów dla $(\vec{E} + i\vec{B})$ jak dla $e^{+i\omega t}$,

$$\cosh \omega = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\sinh \omega = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

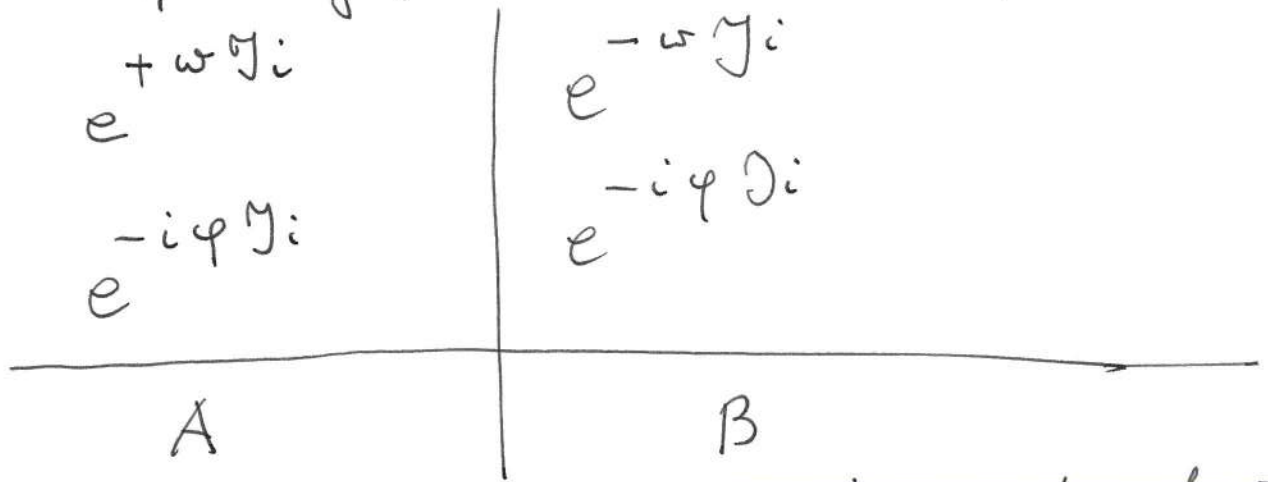
Wektory i wartości własne J_z

$$J_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{n} \parallel \vec{j}, \quad \text{gdzie } \vec{n} = [0, 0, 1]$$

Wektory własne

$$|1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformacji ^{obrotów} Lorentza dla spinorów 1



Niech obserwator porusza się w kierunku $-z$.

$$e^{\omega \gamma_z} = \hat{1} + \omega \gamma_z + \frac{\omega^2}{2!} \gamma_z^2 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \text{ch}(\omega) & -i \text{sh}(\omega) \\ i \text{sh}(\omega) & \text{ch} \omega \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Osiatami up wektory własne

$$\begin{pmatrix} \cosh \omega & -i \sinh \omega & 0 \\ i \sinh \omega & \cosh \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cosh \omega + \sinh \omega \\ i \sinh \omega + \cosh \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\cosh \omega + \sinh \omega) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podobni

$$\begin{pmatrix} \cosh \omega & -i \sinh \omega & 0 \\ i \sinh \omega & \cosh \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cosh \omega - \sinh \omega \\ i \sinh \omega - \cosh \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\cosh \omega - \sinh \omega) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nie ulega zmianie $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Ale } \cosh \omega - \sinh \omega = \frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

$$\cosh \omega + \sinh \omega = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

Wniosek: Przy obserwator por. ni v kierunek -z:

$$|1\rangle' \rightarrow \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} |1\rangle, \quad |-1\rangle' \rightarrow \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} |-1\rangle$$

$$|0\rangle' \rightarrow |0\rangle$$

podobni jak w efekcie Dopplera!

T_{ny} macierz

$$G_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_y = \begin{bmatrix} & & i \\ & & \\ -i & & \end{bmatrix}$$

$$G_z = \begin{bmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$[G_x, G_y] = i G_z$$

można wyrazić w bazie wektorów własnych

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

które $\langle \tilde{i} | j \rangle = \delta_{ij}$, gdzie \tilde{i} jest

starem symbolem.

Wówczas $\langle \tilde{i} | G_k | j \rangle$ mają postać

$$G_x = \begin{bmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}$$

$$G_y = \begin{bmatrix} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ & \frac{i}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}$$

$$G_z = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Równanie Maxwella w nowej bazie

$$\vec{n} \cdot \vec{J} \omega_+ = + \omega_+$$

$$\vec{n} \cdot \vec{J} \omega_- = - \omega_-$$

A

B

Nisch

$$\vec{n} = [\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta]$$

Wissuas

$$\vec{n} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} & \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & 0 & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Zdefiniuj

$$w_+ = \begin{bmatrix} \frac{1+\cos \theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}, w_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \\ \cos \theta \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

$$w_- = \begin{bmatrix} \frac{1-\cos \theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\cos \theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{w}_i | w_j) = \delta_{ij}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{y} w_i = i w_i \quad \text{gdzie } i = (+1, 0, -1)$$

Zwie sek pomiedzy $E \pm iB$ a
4-potencjalen $A_\mu (A_t = 0)$

Zatoz, ze $A_\mu = (A_x, A_y, A_z, 0)$

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Niech $\vec{A} = \vec{A} \cdot e^{+i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\nabla \times \vec{A} = -i\vec{k} \times \vec{A} \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

sted $\vec{E} = -i\omega \vec{A}$

$$\vec{B} = -i\omega \vec{n} \times \vec{A}$$

$$E \pm iB = -i\omega [\vec{A} \pm i\vec{n} \times \vec{A}]$$

Niech $\vec{n} = [0, 0, 1]$

$$\vec{A} = [1, i, 0]$$

$$E \pm iB = -i\omega [[1, i, 0] \pm i[-i, 1, 0]]$$

$$= -i\omega 2 \begin{cases} [1, i, 0] & \text{znak +} \\ [0, 0, 0] & \text{znak -} \end{cases}$$

dlę znaku $\vec{A} = [1, -i, 0]$

$$E \pm iB = -i\omega \left\{ [1, -i, 0] \pm i[i, 1, 0] \right\}$$

$$= -i\omega \begin{cases} [0, 0, 0] & \text{dlę } + \\ [1, -i, 0] & \text{dlę } - \end{cases}$$

Co można uogólnić

$$E \pm iB = -i\omega [1, \pm i, 0]$$

$$n = [0, 0, 1]$$

$$\vec{E} \pm i\vec{B} = -i\omega \vec{A}_{\pm}$$

$$A_{\pm} = [1, \pm i, 0]$$

Iny transformacji: Lorentz uodtini ori
 z, dlatego protopadki \vec{A} mi ulegaji
 zmianie i transformacji dotychny
 zmian ω stę d zmianis Dopplera.

dlę ω .

Ogólne rozwiązanie Maxwella

$$W_i \Rightarrow \omega \cdot W_i \quad (\tilde{W}_i | W_j) = \delta_{ij}$$

Wstęp

Mechanika kwantowa

Teoria reprezentacji:
przestrzeni A i B

Równanie Schrödingera

\mathcal{H}_i , reprezentacji $2I+1$ wym

$i\hbar \dot{\psi} = H\psi$

$\vec{n} \cdot \vec{J} w_{\pm} = \pm w_{\pm}$

ψ funkcja falowa

$+$ \rightarrow przestrzeni A

$-$ \rightarrow przestrzeni B

ψ

w_{\pm}

$(\psi_1 | \psi_2) \equiv \int \psi_1^* \psi_2 dV$

$w_+^* w_+$, $w_-^* w_-$

$\psi = \sum_i (\psi_i | \psi) \psi_i \leftarrow$ baza

Grupa przekształceń

$\sum_i |(\psi_i | \psi)|^2 = \text{const.}$

$e^{-i\varphi \mathcal{H}_i}$
A) $e^{+\omega \mathcal{H}_i}$ B) $e^{-\omega \mathcal{H}_i}$

Obrotów przestrzeni
mi zmiennymi

$w_+^* w_+$, $w_-^* w_-$

Schnięcia (tr. Lorentza)
zmiennia

$w_+^* w_+$ i $w_-^* w_-$

jak transformacji ni

$w_i^* w_i$

↪ pnestreni A.

Oznaczą spinor 2-wymiarowy ↪ pnestreni A (A_+, A_-) .

Obrot wokół osi z o kąt φ przekształca

obrot

$$A'_+ = e^{-i\frac{\varphi}{2}} A_+ \leftarrow$$

$$A'_- = e^{+i\frac{\varphi}{2}} A_- \leftarrow$$

Lorentz

$$A'_+ = (c+s) A_+ \leftarrow$$

$$A'_- = (c-s) A_- \leftarrow$$

$$A_+^{1*} = e^{+i\frac{\varphi}{2}} A_+^* \leftarrow$$

$$A_-^{*1} = e^{-i\frac{\varphi}{2}} A_-^* \leftarrow$$

$$A_+^{*1} = (c+s) A_+^* \leftarrow$$

$$A_-^{*1} = (c-s) A_-^* \leftarrow$$

$$B_+^1 = e^{-i\frac{\varphi}{2}} B_+ \leftarrow$$

$$B_-^1 = e^{+i\frac{\varphi}{2}} B_- \leftarrow$$

$$B_+^1 = (c-s) B_+ \leftarrow$$

$$B_-^1 = (c+s) B_- \leftarrow$$

$$c = \text{ch } \frac{\varphi}{2}$$

$$s = \text{sh } \frac{\varphi}{2}$$

Reguły transformacji: (A_+^*, A_-^*) ↪ jeśli zrobić podobne do (B_+, B_-) przyporządkowaniu

$$A_+^* \implies B_- \quad (\text{bez ustalenia znaku})$$

$$A_-^* \implies B_+$$

Transformacja Lorentza wzdłuż osi x
 dla spinorów A i B

$$A'_+ = c A_+ + s A_-$$

$$A'_- = c A_- + s A_+$$

$$A_{+}^{*'} = c A_{+}^{*} + s A_{-}^{*}$$

$$A_{-}^{*'} = c A_{-}^{*} + s A_{+}^{*}$$

$$B'_+ = c B_+ - s B_-$$

$$B'_- = c B_- - s B_+$$

$$A_{+}^{*} \Rightarrow - B_{-}$$

$$A_{-}^{*} \Rightarrow + B_{+}$$

Transformacje zachodzi

$$B_{+}^{*} \Rightarrow A_{-}$$

$$B_{-}^{*} \Rightarrow - A_{+}$$

Podwójne sprzężenie

$$B_{+} = B_{+}^{**} = (B_{+}^{*})^{*} = A_{-}^{*} = + B_{+}$$

$$B_{-} = B_{-}^{**} = (-A_{+})^{*} = -(-B_{-}) = B_{-}$$

Wniosek: sprzężenie zespolone spinora A przeprowadza go w spinor B, spinora B w spinor A i zachodzi związek transformacyjny (znak \Rightarrow oznacza - transformuje się jak)

$$A_{+}^{*} \Rightarrow - B_{-}$$

$$A_{-}^{*} \Rightarrow + B_{+}$$

$$B_{+}^{*} \Rightarrow A_{-}$$

$$B_{-}^{*} \Rightarrow - A_{+}$$

Jak transformuje się obiekt

(56)

$$A_+^* A_+ + A_-^* A_- \Rightarrow \textcircled{t}$$

$\Rightarrow -B_- A_+ + B_+ A_-$ czyli obiekt

transformuje się jak

$$A_- B_+ - A_+ B_- \Rightarrow | - + \rangle - | + - \rangle$$

Z własności niezmienniczości obiekt ten transformuje się jak ciał.

Jest niezmienny względem obrotów przestrzennych, ale zmienia się przy transformacji Lorentza.

Na stronie 7 ustaliliśmy, że

$$| - + \rangle \Rightarrow t-2 = | - \rangle_A | + \rangle_B$$

$$| + - \rangle \Rightarrow -(t+2) = | + \rangle_A | - \rangle_B \quad \text{skąd}$$

obekt

$$\textcircled{t} \Rightarrow \frac{1}{2} (| - + \rangle - | + - \rangle)$$

Spężenie zespolone dowolnego spinora \rightarrow przestrzeni A . (57)

Niech zadany bidek stan

$$|p, m\rangle_A^* \Rightarrow |m, p\rangle_B (-1)^p$$

$$|p, m\rangle_B^* \Rightarrow |m, p\rangle_A (-1)^m$$

$$\frac{p+m}{2} = I, \quad \frac{p-m}{2} = M \quad \left| \begin{array}{l} p = I+M \\ m = I-M \end{array} \right.$$

$$|I, M\rangle_A^* \Rightarrow |I, -M\rangle_B (-1)^{I+M}$$

$$|I, M\rangle_B^* \Rightarrow |I, -M\rangle_A (-1)^{I-M}$$

1)

Teoria niezmienników

(58)

W przestrzeni A lub B
niech zadany będzie obiekt

$|I, M\rangle$ spełniający (np. dla A)

$$\vec{A}^2 |I, M\rangle = I(I+1), \quad A_2 |I, M\rangle = M |I, M\rangle,$$

wówczas obiekt

$$|0\rangle \equiv \sum_{M=-I}^I |I, M\rangle_1 \cdot |I, -M\rangle_2 (-1)^{I-M} \quad \text{jest}$$

niezmiennikiem grupy obrotów i tr. Lorentza

Dowód: (przeobrażenie na przydatności A)

Altway operator

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad \text{gdzie } A_1 \text{ działa}$$

na pierwszy składnik $|0\rangle$, A_2 na

drugi.

$$A_2 |0\rangle = (A_2^1 + A_2^2) \sum_{M=-I}^I |I, M\rangle_1 |I, -M\rangle_2 (-1)^{I-M} =$$

$$= \sum_{M=-I}^I (M - (-M)) |I, M\rangle_1 |I, -M\rangle_2 (-1)^{I-M} = 0$$

Należy pokazać, że $\vec{A}^2 |0\rangle = 0$?

$$\vec{A}^2 = (\vec{A}^1)^2 + (\vec{A}^2)^2 + 2 \vec{A}^1 \cdot \vec{A}^2, \quad A_i^1, A_j^2$$

komutują, gdzie działają na inne obiekty.

$$|I, M\rangle_1, |I, M\rangle_2$$

3)

$$(\vec{A}^1)^2 |0\rangle = (\vec{A}^2)^2 |0\rangle = I(I+1) |0\rangle \quad (59)$$

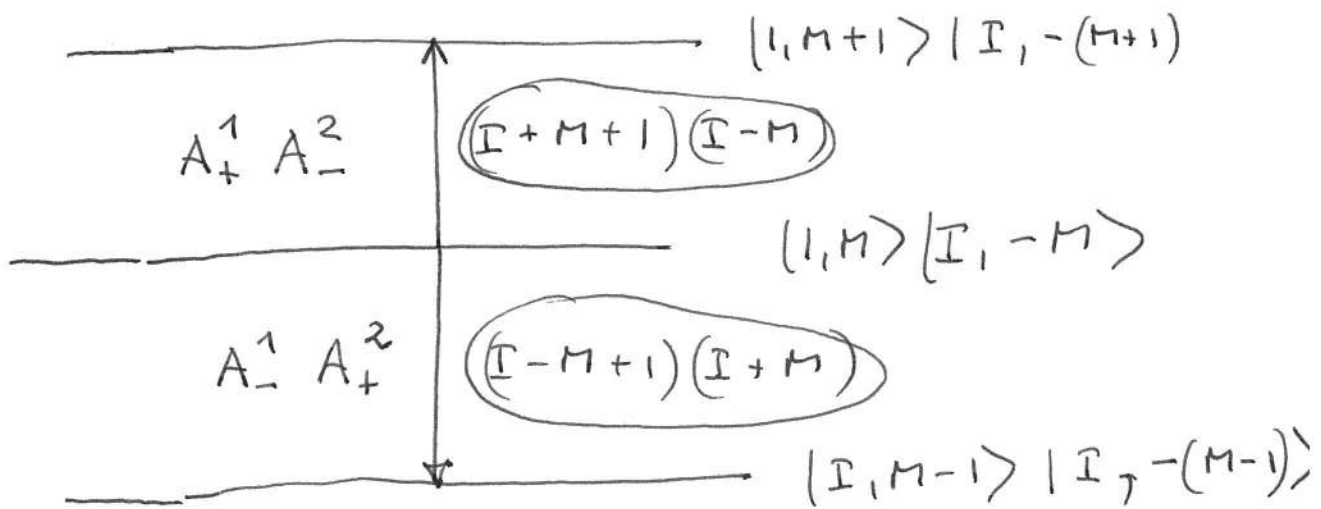
Misli oznanyi $A_{\pm} = A_x + i A_y$ to

$$2 \vec{A}^1 \vec{A}^2 = A_-^1 A_+^2 + A_+^1 A_-^2 + 2 A_2^1 A_2^2$$

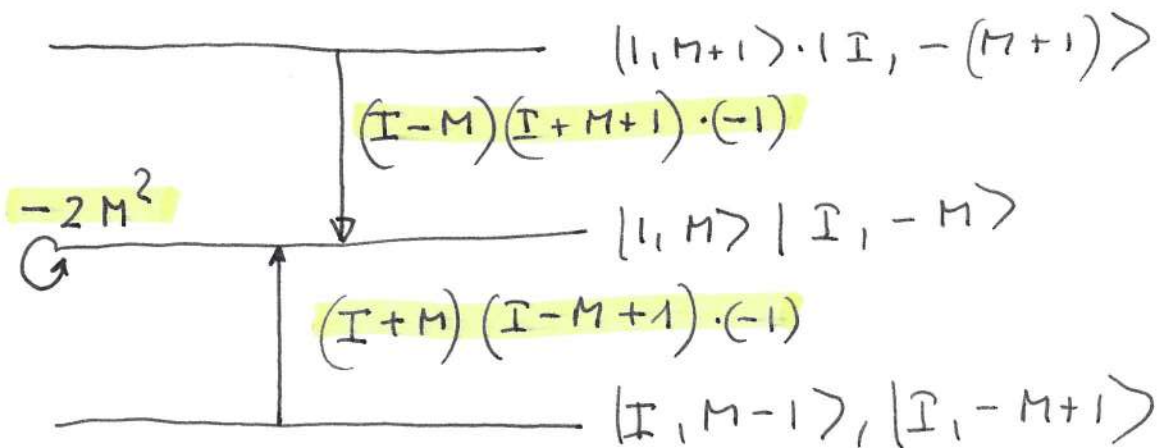
z popredukih vykhadov

$$\begin{cases} A_+ |I, M\rangle = \sqrt{(I+M+1)(I-M)} |I, M+1\rangle \\ A_+ |I, -M\rangle = \sqrt{(I+M+1)(I-M)} |I, -(M+1)\rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_+ |I, -M\rangle = \sqrt{(I-M+1)(I+M)} |I, -M+1\rangle \\ A_- |I, M\rangle = \sqrt{(I-M+1)(I+M)} |I, M-1\rangle \end{cases}$$



$(-1)^{I-M}$



3) *Czyżnik*
 $|I, M\rangle |I, -M\rangle (-1)^{I-M}$ (60)

sortuje pomnożony przez

$$\begin{aligned}
 & - \left[(I-M)(I+M+1) + (I+M)(I-M+1) + 2M^2 \right] \\
 & = - \left[\underbrace{I^2 - M^2 + I - M}_{\downarrow} + \underbrace{I^2 - M^2 + I + M}_{\downarrow} + 2M^2 \right] \\
 & = -2 \left[I^2 + I \right] = -2I(I+1)
 \end{aligned}$$

0 stateciami $2 \bar{A}^1 \bar{A}^2 |0\rangle = -2I(I+1)|0\rangle$

$$\bar{A}^2 |0\rangle = (2(I+1)I - 2I(I+1)) |0\rangle = 0$$

2

Niezmiennik dwóch spinorów

(61)

$\frac{1}{2}$ z prętkami A lub B

Ogólny przypadek

Niech

$$w_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1/2 e^{-i\varphi_1/2} \\ \sin \theta_1/2 e^{+i\varphi_1/2} \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2/2 e^{-i\varphi_2/2} \\ \sin \theta_2/2 e^{+i\varphi_2/2} \end{pmatrix}$$

$$w_1 \circ w_2 = \cos \theta_1/2 \sin \theta_2/2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} - \cos \theta_2/2 \sin \theta_1/2 e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)/2} = -w_2 \circ w_1$$

Def: $w_1 \circ w_2 \equiv w_1^+ w_2^- - w_1^- w_2^+ = -w_2 \circ w_1$

Spinory równani \vec{n}_1, \vec{n}_2 w_1 i w_2 spełniają

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{\sigma} w_1 = + w_1$$

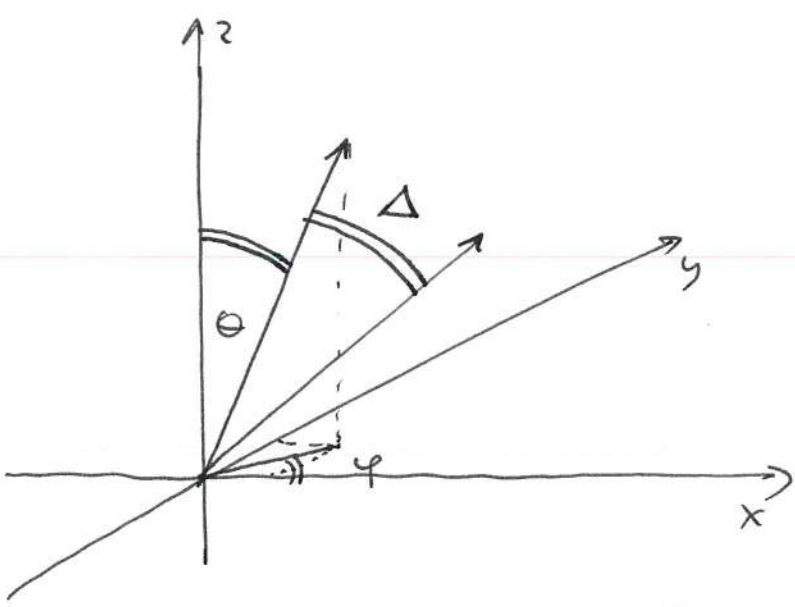
$$\vec{n}_2 \cdot \vec{\sigma} w_2 = + w_2$$

$$\vec{n}_1 = [\sin \theta_1 \cos \varphi_1, \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \cos \theta_1]$$

$$\vec{n}_2 = [\sin \theta_2 \cos \varphi_2, \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \cos \theta_2]$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ &= \cos \Delta = \frac{1 - \sin^2 \frac{\Delta}{2}}{2} \end{aligned}$$

2)



Ile wynosi $|w_1 \circ w_2|^2$?

$$|w_1 \circ w_2|^2 = c_1^2 s_2^2 + c_2^2 s_1^2 - c_1 s_2 c_2 s_1 \left[e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} \right]$$

$$= -\frac{c_1 c_2}{2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{2}$$

gdzie $c_1^2 s_2^2 + c_2^2 s_1^2 = \frac{1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{2}$

$$= \frac{1 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos \Delta}{2} = \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

Szerokość pasywnadek

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$w_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1/2 \\ \sin \theta_1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2/2 \\ \sin \theta_2/2 \end{pmatrix}$$

3)

Wönnar

(63)

$$w_1 \circ w_2 = \cos \theta/2 \sin \theta/2 - \sin \theta/2 \cos \theta/2$$

$$= \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

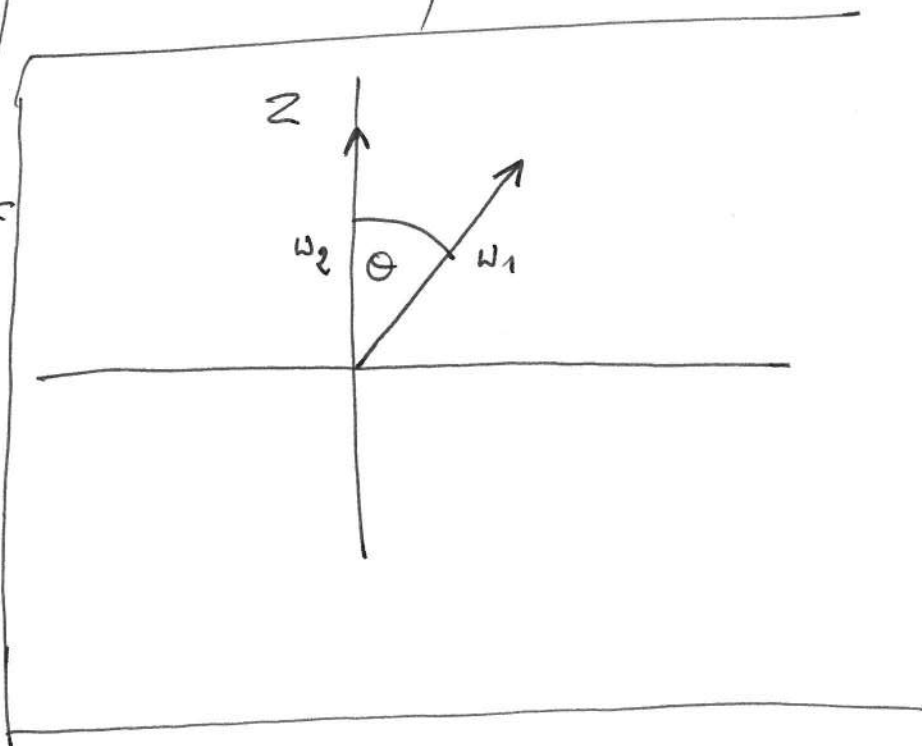
$$w_1 \circ w_2 = \sin \frac{\Delta}{2} \quad |w_1| = |w_2| = 1$$

Spin 1 pærdæni A lúð B

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1 - \cos \theta}{2} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 \circ w_2 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$= \sin^2 \frac{\theta}{2}$$



Analiza niezmiennika
czasoprzestrzeni $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Z poprzednich wyliczeń wiadomo, że

$$|++\rangle = x + iy, \quad | - + \rangle = t - z$$

$$|+-\rangle = -(x - iy), \quad |+-\rangle = -(z + t)$$

łatwo obliczyć obiekty transformujące
się jak x, y, z, t

$$x = \frac{1}{2} (|++\rangle - |--\rangle)$$

$$y = -\frac{i}{2} (|++\rangle + |--\rangle)$$

$$z = -\frac{1}{2} (|-+\rangle + |+-\rangle)$$

$$t = \frac{1}{2} (|-+\rangle - |+-\rangle)$$

Obiekt $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ jest niezmiennikiem
i wynosi $t \cdot t - x \cdot x - y \cdot y - z \cdot z =$

$$2 \frac{1}{4} [-|-+\rangle |+-\rangle - |+-\rangle |-+\rangle$$

$$+ |++\rangle |--\rangle + |--\rangle |++\rangle] =$$

$$= \frac{1}{2} [-|-\rangle_A |+\rangle_B |+\rangle_A |-\rangle_B - |+\rangle_A |-\rangle_B |-\rangle_A |+\rangle_B$$

$$+ |+\rangle_A |+\rangle_B |-\rangle_A |-\rangle_B + |-\rangle_A |-\rangle_B |+\rangle_A |+\rangle_B] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\left(|+\rangle_A |-\rangle_A - |-\rangle_A |+\rangle_A \right) |+\rangle_B |-\rangle_B \right. \\
&\quad \left. - \left(|+\rangle_A |-\rangle_A - |-\rangle_A |+\rangle_A \right) |-\rangle_B |+\rangle_B \right] \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\left(|+\rangle_A |-\rangle_A - |-\rangle_A |+\rangle_A \right)}_A \cdot \underbrace{\left(|+\rangle_B |-\rangle_B - |-\rangle_B |+\rangle_B \right)}_B
\end{aligned}$$

Wniosek: obiekt $t't - x'x - y'y - z'z$
 wyraża się jako iloczyn dwóch nierozdzielnych
 w przestrzeni A i w przestrzeni B.

Niezmiennik dla fotonu's

(66)

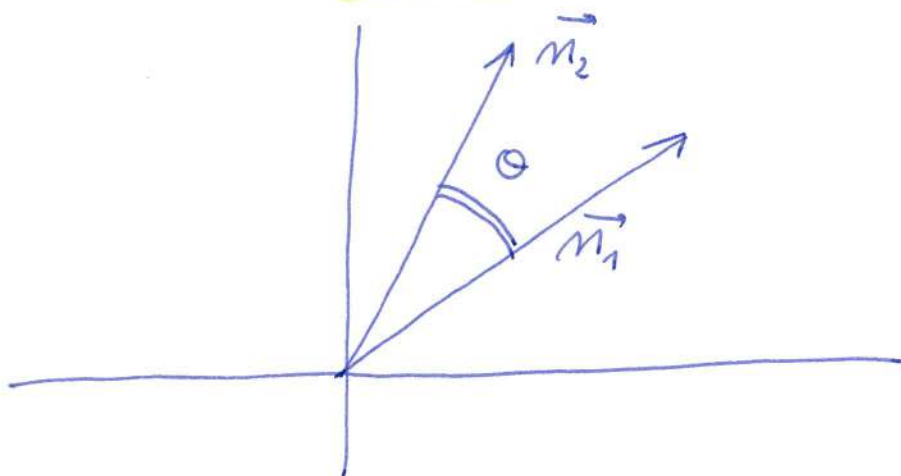
$$K_1 = (\omega_1, \omega_1 \vec{n}_1) = (\omega_1, \vec{k}_1) = \omega_1 (1, \vec{n}_1)$$

$$K_2 = (\omega_2, \omega_2 \vec{n}_2) = \omega_2 (1, \vec{n}_2)$$

$$K_1 \cdot K_2 = \omega_1 \omega_2 (1 - \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) =$$

$$= \omega_1 \cdot \omega_2 (1 - \cos \theta) =$$

$$= \omega_1 \cdot \omega_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$



Hipoteza:

Wtedy zatem, że niezmiennik ma postać

$$|+\rangle'_A |-\rangle_A - |-\rangle'_A |+\rangle_A \propto \sqrt{\omega_1 \omega_2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Symetrie niezmienilky

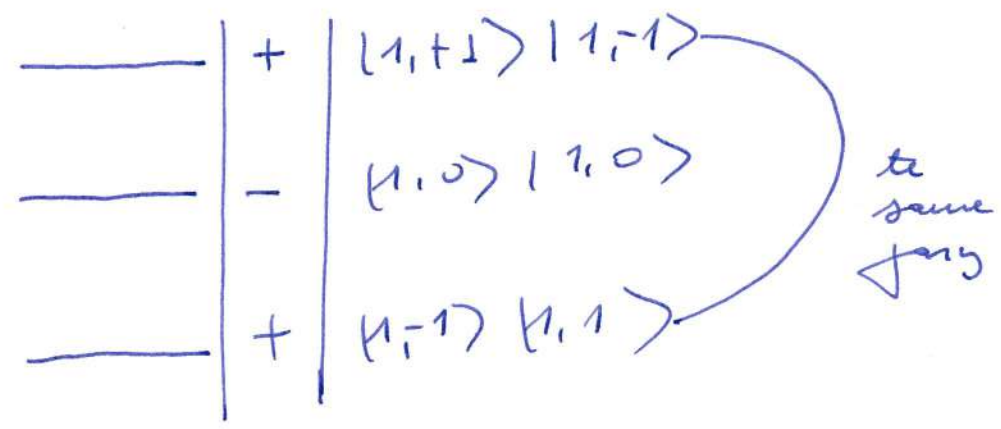
Průhled: dle prvků A lub B

1/2

$$\frac{|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle}{\sqrt{2}} = a(1,2)$$

Zachodri $a_{1/2}(1,2) = -a(2,1)$

1)



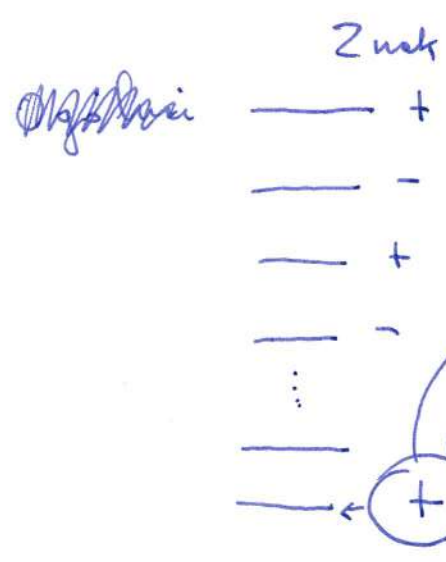
$$a_1(1,2) = + \text{ a. } a_1(2,1)$$

Ozřelni dle potřobkovým reprezentaci: re spinem

$$a_I(1,2) = -a_I(2,1),$$

re spinem catkovitým

$$a_I(1,2) = + a(2,1)$$



$$|I, M\rangle_1 |I, -M\rangle_2 \oplus |I, -M\rangle_1 |I, M\rangle_2$$

spin catkovity $I = 1, 2, \dots$
niepanytř ilosi stanov

panytř ilosi stanov
spiny potřobkove
 $I = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$

Wstęp

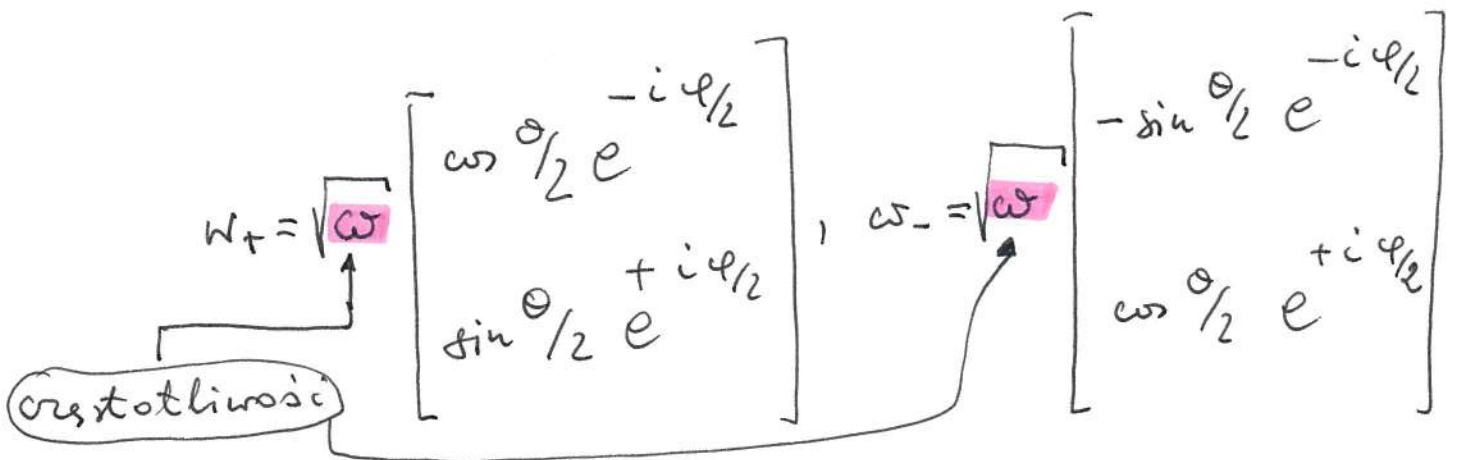
a) Na 1 wykładzie została ustanowiona relacja pomiędzy spinorami $\frac{1}{2}$ w przestrzeniach A i B a 4-vektorem

$$|-\rangle_A |+\rangle_B \Rightarrow t-z, \quad |-\rangle_A |-\rangle_B \Rightarrow -x+iy$$

$$|+\rangle_A |+\rangle_B \Rightarrow x+iy, \quad |+\rangle_A |-\rangle_B \Rightarrow -z-t.$$

b) Zależności między portami spinorów spełniających równania

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \psi_{\pm} = (\pm) \omega_{\pm}; \quad (+) \omega A, \quad (-) \omega B$$



c) Dla spinorów $\frac{1}{2}$ A lub B w przestrzeniach A i B

$A^* A$ zachowuje się jak skalar t .

Transformacji Lorentza w A $e^{w/2 \sigma_i} A = A'$

$$A^* A' \rightarrow A^* e^{w/2 \sigma_i} e^{w/2 \sigma_i} A = \cosh w \cdot A^* A + \sinh w \cdot A^* \sigma_i A$$

Widai, i

$$\left(A^* A, A^* \vec{\sigma}; A \right) \leftarrow \text{tworzy 4-vektor}$$

$$\left(B^* B, -B^* \vec{\sigma}; B \right) \leftarrow \text{w przestrzeni}$$

A : B odpowiednio.

Dla spinora $\omega +$ tworzy ortonormalny:

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \left(\begin{matrix} \omega, \omega \vec{n} \\ \omega, -\omega \vec{n} \end{matrix} \right) \text{ podobny do wektora} \\ \text{falowego funkcyj}$$

Zachodzi $\omega^2 - (\omega \vec{n}) (\omega \vec{n}) = 0$, gdy $|\vec{n}| = 1$,
 co stwierdza, i $(\omega, \omega \vec{n})$ opisuje obiekt
 poruszający się z prędkością światła.

2)

Wprowadzy pnestnie!

złożony ze stanów reprezentacji: $\frac{1}{2}$ dla

A i B.

(71)

Numer	stan
1	$ +\rangle_A$
2	$ -\rangle_A$
3	$ +\rangle_B$
4	$ -\rangle_B$

← bispinor

W tej bazie np. $P|1\rangle = i|3\rangle$ i P ma postać macierową

$$P = i \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$P^2 = -1$$

W pnestnie tej moim wprowadzić operatory γ_i i O_i (generatory obrotów i pchnięć)

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$O_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}$$

$$-i\varphi \gamma_i$$

Grupa obrotów $e^{+i\varphi O_i}$

grupa tr. Lorentz e

3)

Wartości własne operatora P

(72)

$$|1\rangle_P = |+\rangle_A + |+\rangle_B$$

$$|2\rangle_P = |+\rangle_A - |+\rangle_B$$

$$|3\rangle_P = |-\rangle_A + |-\rangle_B$$

$$|4\rangle_P = |-\rangle_A - |-\rangle_B$$

$$P|1\rangle_P = +i|1\rangle_P$$

$$P|2\rangle_P = -i|2\rangle_P$$

$$P|3\rangle_P = +i|3\rangle_P$$

$$P|4\rangle_P = -i|4\rangle_P$$

Rzut $|+\rangle$ lub $|-\rangle$ musi być na dowolną oś.
 Sp to wektor własny operatora parzystości
 w pewnym stanie A lub B.

Transformacja operatorów ogólna

$w' \rightarrow R w$, R przekształcenie,
 w spinor (R - np. odbicie parzystości).

Niech zadana będzie grupa przekształceń
 i jej element G (porząd element odwrotny).

$$\boxed{G w'} = G R w = \boxed{G R G^{-1}} \boxed{G w}$$

Wniosek: w przekształceniu przekształceń
 przez G , operator $R \rightarrow G R G^{-1}$

Przykład:

$$P Y_i P^{-1} = Y_i$$

$$P O_i P^{-1} = -O_i$$

4)

Transformacji operatore parzystości

(73)

a) obrotu jednostkowego

$$G_i = e^{-i\varphi J_i}$$

$$G_i^{-1} = e^{+i\varphi J_i}$$

Można pokazać, że

$$P = G_i P G_i^{-1}$$

b) transformacji Lorentza

$$G_i = e^{+w O_i}$$

$$G_i^{-1} = e^{-w O_i}$$

Ze pomocą Mathematici łatwo
sprawdzić, że

$$P' = G_i P G_i^{-1} = \cancel{\text{sh}(w) P} \text{ch}(w) \cdot P - \text{sh}(w) \gamma^i$$

$$= \frac{P}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v \gamma^i}{\sqrt{1-v^2}}$$

gdzie

$$\gamma^i \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\delta_i \\ \hline \delta_i & 0 \end{array} \right) \quad i = 1, 2, 3$$

$$P \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \gamma^4$$

Transformaci Lorentz dle γ^i

$$G_i \gamma^i G_i^{-1} = \cosh(\omega) \gamma^i - \sinh(\omega) P$$

↑
transformaci štádovej priestorovej

W mierek: $(P, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ predstavujú

si jak 4-vektor

Nech operator P má ~~na~~ vektory
časne $W_{\pm}^{\pm} \leftarrow$ pangitosi
 $W_{\pm}^{\pm} \leftarrow$ spin

$$P W_{\pm}^{\pm} = \pm W_{\pm}^{\pm}$$

Höwnes zachodri dle pchuvici v kicr. i

$$G_i P G_i^{-1} G_i W_{\pm}^{\pm} = \pm G_i W_{\pm}^{\pm}$$

Ogólna transformacja Lorentza (75)
 operatora parytości - potaj jawne

Ustaliliśmy, że operator parytości

(bez i!) $P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$ przetransformujemy do innego

układu me potaj (transformacji $e + \omega O_i$)

$$P' \rightarrow \text{ch}(\omega) P - \text{sh}(\omega) \sigma^i$$

Można wprowadzić pewną wartość
 do wskazywanego kierunku \vec{n}
 $+ \omega (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$
 e , wówczas

$$P' \rightarrow \text{ch}(\omega) \cdot P - \text{sh}(\omega) \begin{bmatrix} 0, -\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, 0 \end{bmatrix}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$c = \text{ch}(\omega),$$

$$s = \text{sh}(\omega),$$

$$c + s = e^{\omega}$$

$$c - s = e^{-\omega}$$

$$G_{\vec{n}} = e^{\omega \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \text{ch}(\omega/2) + \text{sh}(\omega/2) \cdot \begin{bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, 0 \\ 0, -\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

Ogólny wzór na operator parzystości P „pchnięty” o ω w kierunku \vec{n}

$$\begin{bmatrix} 0 & c + s \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \\ c - s \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} = P' \equiv G_{\vec{n}} P G_{\vec{n}}^{-1}$$

Niech $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm}$, $\omega_{\pm} = \sqrt{\omega} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ i e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{bmatrix}$

Dla $\omega = 0$ (w układzie spoczynkowym) istnieją ~~4~~ 4 rozwiązania własne operatora P

$$\begin{pmatrix} \omega_+ \\ \omega_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_+ \\ -\omega_+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_- \\ \omega_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_- \\ -\omega_- \end{pmatrix}$$

Zatem widzimy, że dla $\omega_{\pm} = (\omega_+^+, \omega_+^-)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_+^+ \\ \omega_+^- \\ \pm \omega_+^+ \\ \pm \omega_+^- \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \omega_+^+ \\ \omega_+^- \\ \omega_+^+ \\ \omega_+^- \end{bmatrix}, \text{ podobnie dla } \omega_-$$

(77)

Działania operatora $G_{\vec{n}}$ na
stany własne operatora pędu P .

$$G_{\vec{n}} = \begin{bmatrix} \text{ch}\left(\frac{v}{2}\right) + \text{sh}\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \text{ch}\left(\frac{v}{2}\right) - \text{sh}\left(\frac{v}{2}\right) \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$G_{\vec{n}} \begin{bmatrix} w_+ \\ w_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\text{ch}\left(\frac{v}{2}\right) + \text{sh}\left(\frac{v}{2}\right) \right] w_+ \\ \left[\text{ch}\left(\frac{v}{2}\right) - \text{sh}\left(\frac{v}{2}\right) \right] w_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{v/2} w_+ \\ e^{-v/2} w_+ \end{bmatrix}$$

Widzi zatem, że

$$\begin{pmatrix} w_+ \\ \pm w_+ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} e^{v/2} w_+ \\ \pm e^{-v/2} w_+ \end{bmatrix} = W_{\pm}^{\pm}$$

\swarrow pęd
 \nwarrow helicity

$$\begin{pmatrix} w_- \\ \pm w_- \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} e^{-v/2} w_- \\ \pm e^{v/2} w_- \end{bmatrix} = W_{\pm}^{\mp}$$

Powzime bispinory są wektorami własnymi operatora P

$$\underbrace{G_{\vec{n}} P G_{\vec{n}}^{-1}}_{P'} \cdot \underbrace{G_{\vec{n}} W_{\pm}^{\pm}}_{W_{\pm}^{\pm}} = \pm G_{\vec{n}} W_{\pm}^{\pm}$$

\swarrow pęd
 \nwarrow helicity

Jak zachowują się bispinor przy przekształceniach?

(78)

Przykład:

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{w/2} & 0 & A \\ \hline e^{-w/2} & 0 & B \end{array} \right]$$

4 wektor jest sumą $(w^*w, \pm w^* \vec{\sigma} w)$

$$e^{w/2} e^{w/2} \begin{bmatrix} w, w \cdot \vec{n} \\ w, w \cdot \vec{n} \end{bmatrix} + e^{-w/2} e^{-w/2} \begin{bmatrix} w, -w \cdot \vec{n} \\ w, -w \cdot \vec{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (e^w + e^{-w})w, (e^w - e^{-w})w \cdot \vec{n} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\textcircled{2w} \text{ch} w, \textcircled{2w} \vec{n} \cdot \text{sh} w \right]$$

Długość: 4-wektor wynosi $\textcircled{2w}$

$2w$ - jest odpowiednikiem masy spoczynkowej up. elektronu.

$$(2w, 0, 0, 0) \rightarrow [2w \cdot \text{ch} w, 2w \text{sh}(w) \vec{n}]$$

Związek z równaniem Diraca

zjedi $\rho = \gamma^4$,

$m_0 \text{ch}(v) = E = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$, $\vec{p} = \frac{\vec{v} m_0}{\sqrt{1-v^2}} = m_0 \cdot \text{sh}(v)$

to otrzymamy

~~$E \gamma^4 - \vec{p} \vec{\gamma} = m_0$~~ lub

$E \gamma^4 - \vec{p} \vec{\gamma} = m_0$

W postaci hamiltonowskiej

$E = \vec{p} (\gamma^4 \vec{\gamma}) + \gamma^4 m_0$

r. Diraca
w próżni
mają postaci

Dla $E > 0$ rozwiązani

$\begin{pmatrix} e^{w/2} & w+ \\ e^{-w/2} & w+ \\ e^{+w/2} & w- \\ e^{-w/2} & w- \end{pmatrix} \leftarrow \text{elektron}$

Dla $E < 0$ se to rozwiązani 2

pozytywni ujemny i odwrócony przedkości

$-E = \vec{p} (\gamma^4 \vec{\gamma}) + \gamma^4 m_0$

$E = \vec{p} (\gamma^4 \vec{\gamma}) + \gamma^4 m_0$
 ↑ odwrócony przedkości ↑ pozytywni ujemny

$$\begin{pmatrix} e^{-u/2} & u_+ \\ -e^{u/2} & u_+ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^{u/2} & u_- \\ -e^{-u/2} & u_- \end{pmatrix} \leftarrow \text{pozytron}$$

$+1/2$ $-1/2$

Własności

4 stany są wzajemnie ortogonalne

$$W_i^* W_j = \delta_{ij}$$

①

Wykład 8

81

Wstęp

1) Rozpatrujemy operator parzystości P , przy transformacjach Lorentza w kierunku i zachowuje się jak (t)

$$p' = \cosh(\omega) \cdot P - \sinh(\omega) \gamma^i$$

$$\gamma^{ii} = \cosh(\omega) \cdot \gamma^i - \sinh(\omega) \cdot P$$

$[P, \gamma^x, \gamma^y, \gamma^z] = 4$ wektor.

2) Operator parzystości zmieszany
 ma reprezentację $J_A = \frac{1}{2}$ i $J_B = \frac{1}{2}$.
 Wektorami własnymi P są bispinory

$$\begin{pmatrix} J_A \\ J_B \end{pmatrix}$$

3) Wektory własne operatora P' w

$$\begin{bmatrix} \pm \omega/2 & \omega_{\pm} \\ e & \\ \mp \omega/2 & \\ \textcircled{\pm} e & \omega_{\pm} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \omega \begin{pmatrix} \pm \\ \pm \end{pmatrix} \\ \textcircled{\pm} \end{matrix}$$

parzystości

$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \omega_{\pm} = \pm \omega_{\pm}$

~~skrzętności~~

← parzystości

② 4) § bi-spinory ψ_{\pm}^{\pm} ψ 82

rozwiązaniami równania Diraca,

z tym, że dla ujemnej prędkości
mależy wziąć przeciwnym
znakiem.

3

Symetrie odbicia pniestneci P i czasu T

83

Działaniami operatorów parzystości P i generatora pchnięcia i obrotu (patrz 103)

$$PI: P^{-1} = +I_i$$

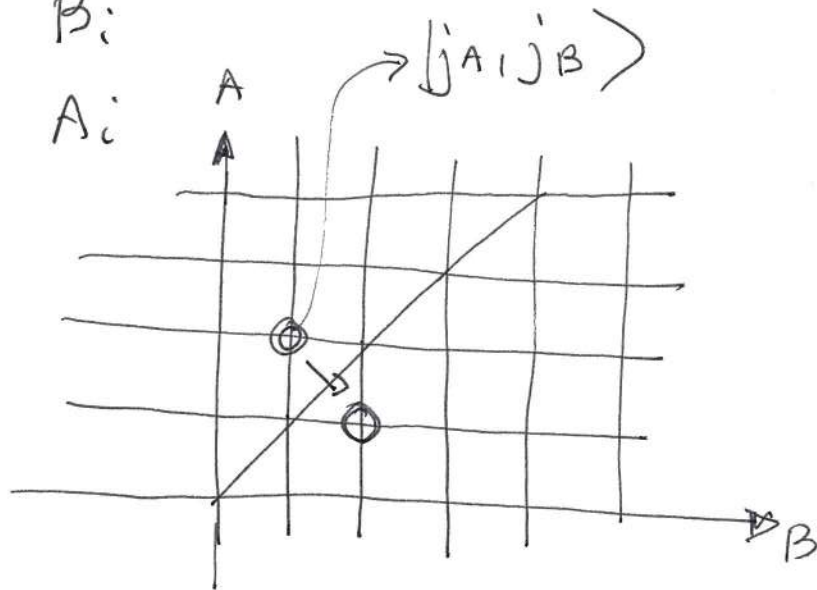
$$PO: P^{-1} = -O_i$$

Pamiętajcie, że

$$A_i = \frac{1}{2}(I_i + O_i)$$
$$B_i = \frac{1}{2}(I_i - O_i)$$

$$PA_i: P^{-1} = B_i$$

$$PB_i: P^{-1} = A_i$$



Niech zatem będzie reprezentacji grupy Lorentza scharakteryzowanej $|j_A, j_B\rangle$

$$A^2 |j_A\rangle = j_A(j_A + 1) |j_A\rangle,$$

$$A_2 |j_A\rangle = m_A |j_A\rangle,$$

podobnie dla B

$$P |j_A, j_B\rangle$$

$$A^2 P |j_A, j_B\rangle = A_i \underbrace{A_i P}_{+j_A, j_B} |j_A, j_B\rangle$$

$$= A_i P B_i |j_A, j_B\rangle$$

$$= P B_i B_i |j_A, j_B\rangle =$$

$$= j_B(j_B+1) P |j_A, j_B\rangle$$

Streszczając

$$A^2 P |j_A, j_B\rangle = j_B(j_B+1) P |j_A, j_B\rangle$$

$$B^2 P |j_A, j_B\rangle = j_A(j_A+1) P |j_A, j_B\rangle$$

Można postawić hipotezę:

$$P |j_A, j_B\rangle \propto |j_B, j_A\rangle$$

$$\text{Np: } P |1, 0\rangle = |0, 1\rangle$$

$$P |1/2, 0\rangle = |0, 1/2\rangle$$

Operator P sprzęga dwie reprezentacje

$$|j_A, j_B\rangle \quad \text{i} \quad |j_B, j_A\rangle$$

symetryczne względem diagonalnej
diagramie reprezentacji: A i B

⑤

Działani operatorów odbicij czasu 85

$$T I_i T^{-1} = -I_i$$

$$T O_i T^{-1} = -O_i$$

Zatem operator T działający na
generatory momentu A i B

$$T A_i T^{-1} = -A_i \Rightarrow T A_i = -A_i T$$

$$T B_i T^{-1} = -B_i \Rightarrow T B_i = -B_i T$$

Podobnie

$$A^2 T |j_A, j_B\rangle = A_i A_i T |j_A, j_B\rangle$$

$$= + T A_i A_i |j_A, j_B\rangle = j_A(j_A + 1) T |j_A, j_B\rangle$$

Podobnie dla operatora B^2

$$A_z T |j_A, j_B\rangle = -T A_z |j_A, j_B\rangle$$

$$= -m_A T |j_A, j_B\rangle$$

Podobnie

$$B_z T |j_A, j_B\rangle = -m_B T |j_A, j_B\rangle$$

⑥ Czym różnią się dwie reprezentacje 86

$$|\frac{1}{2}\rangle_A \otimes |\frac{1}{2}\rangle_B \quad i \quad |\frac{1}{2}\rangle_A \oplus |\frac{1}{2}\rangle_B$$

Stanami pierwszej reprezentacji:

są 4 stany (A na pierwszym miejscu,

B na drugim)

$$\begin{matrix} A & B \\ |++\rangle & = x + iy \end{matrix}$$

$$|+-\rangle = -x + iy$$

$$|-+\rangle = x - z$$

$$|--\rangle = -(z + t)$$

Stany własne

A_z, B_z

$$I_x = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & -i & \\ & i & & \end{bmatrix}$$

$$I_y = \begin{bmatrix} & & i & \\ & & & \\ -i & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$I_z = \begin{bmatrix} & & & -i \\ i & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$O_x = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$O_y = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$O_z = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}$$

Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna.

Nie można wybrać takiej bazy podbazy

z $\{t, x, y, z\}$ aby ~~nie~~ przekształceniami obrotu

lub permutacji nie wyprowadzić pozostałych baz podbazy.

7

baza (x, y, z, t)

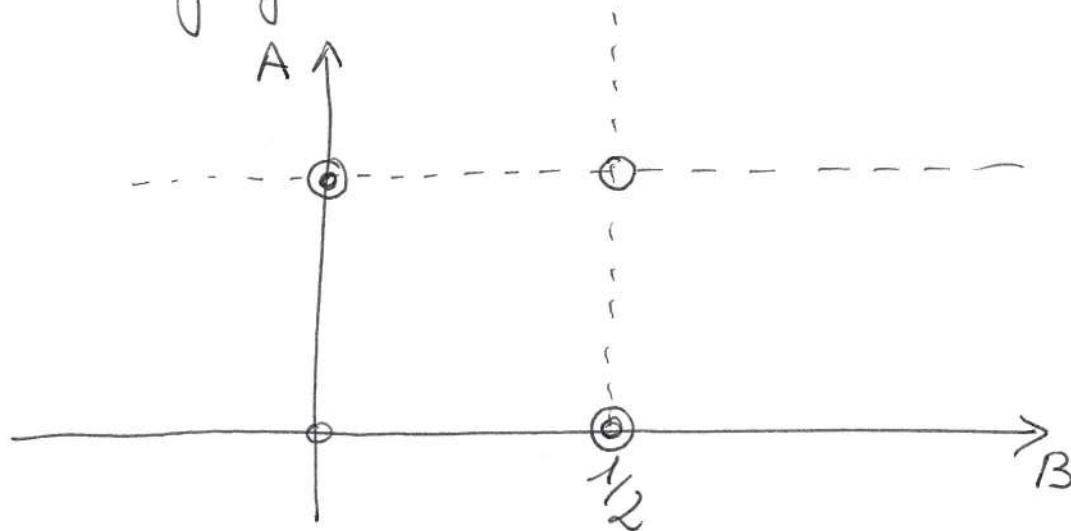
Stany $|++\rangle, |--\rangle, \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}$

pod wpływem obrotów przekształcają się jak składowe $|1, +1\rangle, |1, -1\rangle, |1, 0\rangle$

zob $\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$ jak $|0, 0\rangle$ (fotonu)
Reprezentacja ta ~~jest~~ jest wygodną do opisu

Reprezentacja $|\frac{1}{2}\rangle_A \oplus |\frac{1}{2}\rangle_B$

jest przyrodliwą.



Generatory obrotów

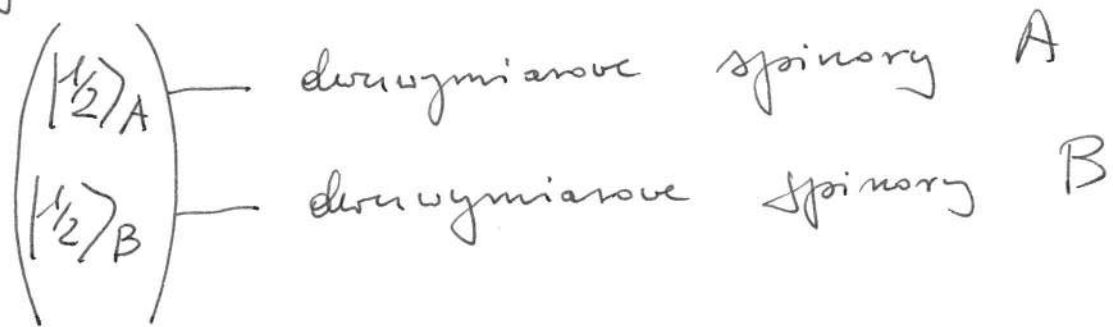
$$I_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{bmatrix}, \quad O_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_i & \\ & -\sigma_i \end{bmatrix}$$

Reprezentacja ta jest sumą dwóch

Reprezentacja $(\frac{1}{2})_A \oplus (\frac{1}{2})_B$

jest używana do opisu fermionów o spinie $\frac{1}{2}$ i o skończonej masie spoczynkowej.

Zwykle przedstawiany jest ze pomocą bi-spinorów



Podstawowym rozwiązaniem są wektory własne operatore pędu oraz

P.

Transformowane do innych układów przy pomocy $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ lub $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}$ pchnięci

są rozwiązaniami ~~tego~~ równania Diraca.

⑧ reprezentacji nieprzywiedlnych

$$|\frac{1}{2}\rangle_A \quad i \quad |\frac{1}{2}\rangle_B$$

Operator parzystości P ma w tej
dwójce reprezentacje.

Działanie operatora odbicia czasu
w reprezentacji $|\frac{1}{2}\rangle_A \otimes |\frac{1}{2}\rangle_B$

$$\begin{aligned} T|++\rangle &= x-iy = -|--\rangle \\ T|--\rangle &= -x-iy = -|++\rangle \\ T|+-\rangle &= -t-z = +|-+\rangle \\ T|-+\rangle &= -(z-t) = +|-+\rangle \end{aligned}$$

stąd musi zachodzić $T|++\rangle \equiv T|+\rangle_A T|+\rangle_B$

$$T|+\rangle_A = i|-\rangle_A$$

$$T|-\rangle_A = -i|+\rangle_A$$

$$T|+\rangle_B = i|-\rangle_B$$

$$T|-\rangle_B = -i|+\rangle_B$$

9) Operator odbicia czasu jest
określony

30

$$T = T_u \cdot K, \text{ gdzie } K$$

operator sprzężenia zespolonego

T_u - operator unitarny

$$\begin{aligned} \text{Dla } T^2 |+\rangle_A &= T(T|+\rangle_A) \\ &= T(i|-\rangle_A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sprzężeniu} \\ \text{zespolone } T}}{-i} T|-\rangle_A = (-i)^2 |+\rangle_A \\ &= -|+\rangle_A \end{aligned}$$

$$\boxed{T^2 = -1}$$

①

Wykład 9

91

Oddziaływania słabe w teorii reprezentacji grupy Lorentz.

Rys historyczny

Fermi: 1934 rok $G \cdot (\bar{\Psi}_p \gamma^\mu \Psi_N) (\bar{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_\nu)$

Rozpad neutronu

$$N \rightarrow P + e + \bar{\nu}$$

$$N + \nu \rightarrow P + e$$

$$\bar{\Psi}_p = \gamma^4 \Psi_p^*, \quad \bar{\Psi}_e = \gamma^4 \Psi_e^*$$

ν	- opisuje spinor spinor	z prędkości	B
$\bar{\nu}$	- " "	-	A

23 lata później, w 1957
Sudarshan, Marshak, Feynman i
Gell-Mann

(2)

(92)

proponuję, aby wyznaki zostały
były ~~opisane~~ opisane

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Portai macierzy γ

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = i \gamma^4 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \\ \hline & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1 - \gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_A \\ \chi_B \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_B \end{pmatrix}$$

③ Oddziaływania Fermi zostają
zmodyfikowane

93

$$G(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \hat{a} \psi_N) (\bar{\psi}_e \gamma^\mu \hat{a} \psi_\nu)$$

W literaturze przyjęto oznaczenia
spinory ψ czterechi B przez ψ .

Powyższe oddziaływania przyjmujemy
postaci

$$G(\psi_p^* \sigma_\mu \psi_N) (\psi_e^* \sigma_\mu \psi_\nu)$$

gdzie $\sigma_\mu = (1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

Dla uproszczenia rozwiązania

$$\psi_p = \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix}_B, \quad \psi_N = \begin{pmatrix} N^+ \\ N^- \end{pmatrix}_B, \quad \psi_e = \begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix}_B, \quad \psi = \begin{pmatrix} \nu^+ \\ \nu^- \end{pmatrix}_E$$

(zaznaczeniem, że wszystkie spinory należą
do B)

④ 4 wektor ma potaci

$$(\bar{p}N) = \left[\underbrace{p^{*+}N^+ + p^{*-}N^-}_t, \underbrace{p^{*+}N^- + p^{*-}N^+}_x, \underbrace{-i(p^{*+}N^- - p^{*-}N^+)}_y, \underbrace{p^{*+}N^+ - p^{*-}N^-}_z \right]$$

det.
 skalarove 4 - vektora

$$\text{nap } (p^{*+}, p^{*-}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N^+ \\ N^- \end{pmatrix} =$$

$$= (p^{*+}, p^{*-}) \begin{pmatrix} -iN^- \\ iN^+ \end{pmatrix} = -i (p^{*+}N^- - p^{*-}N^+)$$

skalarova y - produktu

Oblicz $(\bar{p}N)_{\mu} (\bar{e}v)_{\nu} =$
sumowanie

$$= (\bar{p}N)_t (\bar{e}v)_t - (\bar{p}N)_x (\bar{e}v)_x - \dots$$
$$= (p^+ e^- - p^- e^+)^* \cdot (N^+ v^- - N^- v^+) 2$$

Element mierzniowy oddziaływani

można zapisać

$$G \cdot \underbrace{(p^+ e^- - p^- e^+)}_{\text{mierzniowy}} \underbrace{(N^+ \nu^- - N^- \nu^+)}_{\text{mierzniowy}}$$

mierzniowy przestrzeni B

Ustawając spinorami rozdzielone,
które mogłyby być przekształcone
spinory typu B w A
dotychczas

$(P \cdot e)_B$ $(N \cdot \nu)_B$

$$2 G \left(\begin{matrix} | + - \rangle_{Pe} \\ | - + \rangle_{Pe} \end{matrix} \right)_B \cdot \left(\begin{matrix} | + - \rangle_{N\nu} \\ | - + \rangle_{N\nu} \end{matrix} \right)_B$$

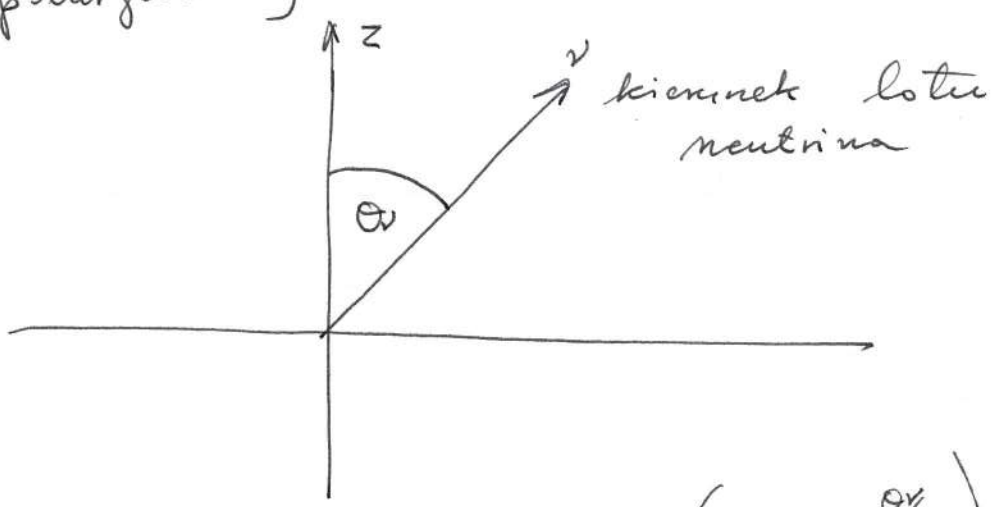
Wniosek: oddziaływanie ^{następuje} tylko
pomiędzy obiektami z przestrzeni B.
poprzez mierzniowy

6

Obliczenia drugiej części

$$N^+ \nu^- - N^- \nu^+ = \cancel{N \nu} = (N \cdot \nu)_B$$

Neutron $N = \sqrt{M_N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, M_N - masa neutronu
spolarzowany



Dla neutrina spinor $\sqrt{E_\nu} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} = \nu$

$$(N \cdot \nu)_B^2 = E_\nu M_N \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} = E_\nu M_N \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

Dla anty-neutrina spinor ma postać

$$\bar{\nu} = \sqrt{E_\nu} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

$$(N \cdot \bar{\nu})^2 = E_\nu M_N \sin^2 \frac{\theta}{2} = E_\nu M_N \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

Doświadczanie

$$1 + 0.88 \cdot \cos \theta$$

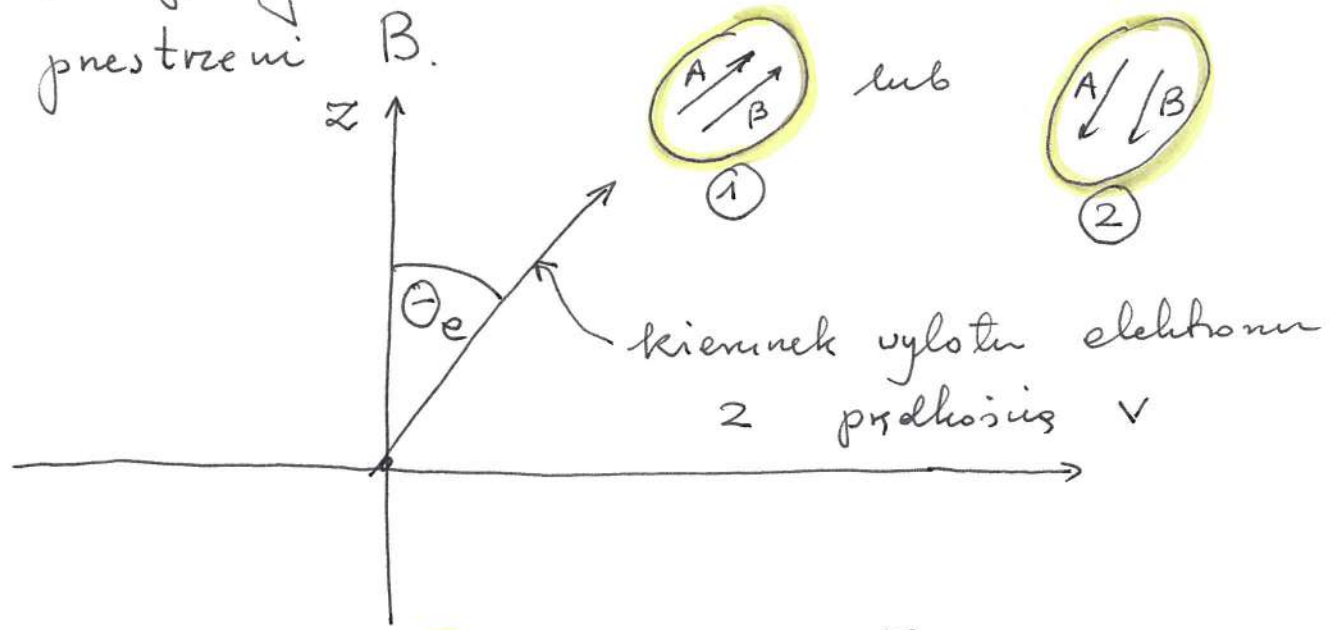
7

obliczenia $(p \cdot e)_B$

97

$$P_I = \sqrt{M_P} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lub} \quad \sqrt{M_P} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P_{II}$$

Funkcje falowe elektronu, energii z przestrzeni B.



w przypadku ω_+ spinor B ma

$$e^{-i\omega_+/2} \begin{pmatrix} \cos \theta_e/2 \\ \sin \theta_e/2 \end{pmatrix} \sqrt{m_e} = e_1$$

w przypadku ω_- spinor B ma

$$e^{i\omega_-/2} \begin{pmatrix} -\sin \theta_e/2 \\ \cos \theta_e/2 \end{pmatrix} \sqrt{m_e} = e_2$$

Dla pędności v

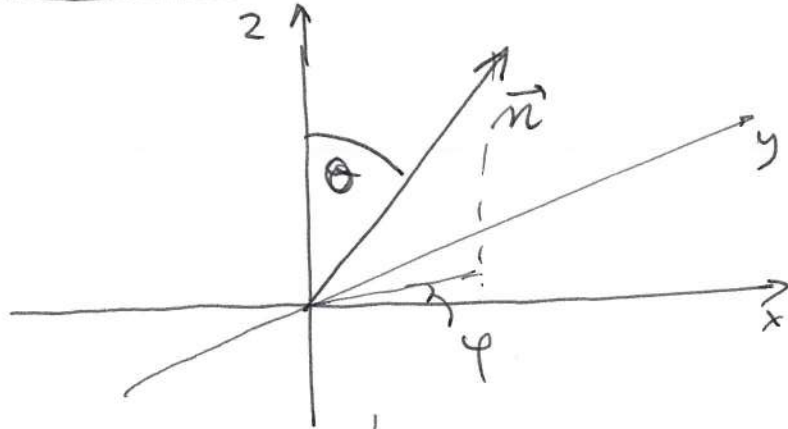
funkcji falowej elektronu

porównajęgo
mają postaci

si \uparrow v kierunku (θ, φ)

z pędności v

$$e^{\pm i\varphi/2} = \frac{1 \pm v}{\sqrt{1 - v^2}}$$



pięciastkowy
effect Dopplera

spin
rowndy
gdy do
 \vec{n}

$$e^{+i\varphi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \theta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\varphi/2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \theta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

spin
anty
rowndy
do
 \vec{n}

$$e^{-i\varphi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \cos \theta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$e^{+i\varphi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \cos \theta/2 e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

9) Razem mamy 4 amplitudy 99

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{I}} \otimes \textcircled{1} &= \sqrt{M_p \cdot m_e} \sin \frac{\theta_e}{2} \cdot e^{-i\omega/2} = (P_{\text{I}} \cdot e_1) \\
 \textcircled{\text{I}} \otimes \textcircled{2} &= \sqrt{M_p \cdot m_e} \cos \frac{\theta_e}{2} \cdot e^{+i\omega/2} = (P_{\text{I}} \cdot e_2) \\
 \textcircled{\text{II}} \otimes \textcircled{1} &= \sqrt{M_p \cdot m_e} \cos \frac{\theta_e}{2} \cdot e^{-i\omega/2} = (P_{\text{II}} \cdot e_1) \\
 \textcircled{\text{II}} \otimes \textcircled{2} &= \sqrt{M_p \cdot m_e} (-\sin \frac{\theta_e}{2}) \cdot e^{+i\omega/2} = (P_{\text{II}} \cdot e_2)
 \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{m_e} e^{\pm i\omega/2} \right)^2 = m_e \cdot e^{\pm i\omega} = m_e (\cosh \omega \pm \sinh \omega)$$

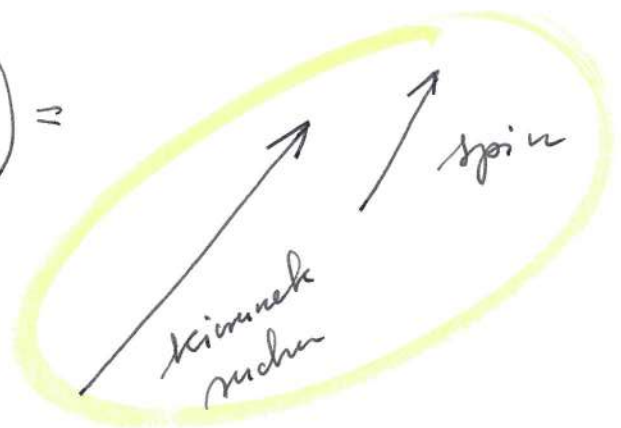
$$= \frac{m_e}{\sqrt{1-v_e^2}} (1 \pm v_e) = E_e \cdot (1 \pm v_e)$$

Yakni jest prawdopodobieństwo że elektron emitowany w rozpadzie β pójdzie ni z pulchsią w równoległy do spinu (przypadek 1)

$$(P_{\text{I}} \cdot e_1)^2 + (P_{\text{II}} \cdot e_1)^2 = M_p \cdot m_e \left(\cos^2 \frac{\theta_e}{2} + \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \right) e^{-i\omega}$$

$$= M_p \cdot \frac{m_e}{\sqrt{1-v_e^2}} (1 - v_e) =$$

$$= M_p E_e (1 - v_e)$$



Prawdep., i spin jest w
odroznym kierunku znosi

$$M_p E_e (1 + v_e) \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{ kier. ruchu} \\ \searrow \text{ spin} \end{array}$$

Skladajac razem, jedna
amplituda procesu znosi

$$4 G^2 \cdot E_\nu M_N \cdot M_p \cdot E_e \frac{[1 + \cos \theta_\nu]}{2} \cdot (1 \pm v_e)$$

Wniosek: jezeli $v_e \approx c$ to elektrony
sa spolaryzowane i spin jest
skierowany precyzyjnie do kierunku
ich ruchu

(11)

101

Dyskusowane oddziaływania
prawidłowo opisuje leptony.

Dla rozpadu hadronów musi
być emitowane

$$G \left(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_N \right) \left(\bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_\nu \right)$$



$$G \left(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \frac{1 - \lambda \gamma^5}{2} \psi_N \right) \left(\bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_\nu \right)$$

$$\lambda \approx 1.26$$

1)

Wykład 10

Oddziaływanie słabe c.d.

Oddziaływanie słabe opisywane
 jest przez macierze
 względem przekształceń grupy Lorentz
 wyrażeni

$$G \left(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_N \right) \left(\bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_\nu \right)$$

opisujące reakcję



Oznaczy operator rutowy

$$a \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2}$$

$$\bar{a} = \frac{1 + \gamma^5}{2}$$

Dla przypomnienia postaci

macierzy γ^i $i = 1, \dots, 5$ me

postaci

2)

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 3$$

$$\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ \hat{1} & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \hat{1} - \text{matrix } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

Zachodzą

$$a + \bar{a} = 1$$

$$\bar{a} - a = \gamma^5$$

Stąd możemy napisać

$$\frac{1 - \lambda \gamma^5}{2} = \frac{a + \bar{a} - \lambda(\bar{a} - a)}{2}$$

$$= \frac{1 + \lambda}{2} a - \frac{\lambda - 1}{2} \bar{a}$$

Macierze $\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{\hat{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Zatem przed hadronowy układ
nie 2 dwa cząstki

$$\left(\bar{\Psi}_p \gamma^m a \Psi_N \right) \text{ i } \left(\bar{\Psi}_p \gamma^m \bar{a} \Psi_N \right)$$

gdzie bispinor

3)

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^* \gamma^4$$

Niech bispinor ma składowe
z reprezentacji A i B oznaczone
odpowiednio u i v

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ gdzie } u \text{ spinor z A} \\ v \text{ spinor z B}$$

$$\gamma^4 \gamma^\mu = \left(1, \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \right)$$

Otrzymujemy zatem 2 czterowektory

$$\bar{\Psi}_p \gamma^\mu \Psi_N = \left[v_p^* v_N, -v_p^* \vec{\sigma} v_N \right] = j_B^\mu$$

$$\bar{\Psi}_p \gamma^\mu \bar{a} \Psi_N = \left[u_p^* u_N, +u_p^* \vec{\sigma} u_N \right] = j_A^\mu$$

Zatem przy hadronowym me
portai

$$\frac{1+\lambda}{2} j_B^\mu - \frac{\lambda-1}{2} j_A^\mu = j_{\text{hadron}}^\mu$$

4) Przel ten moimę &chci
rozłozyci

$$\frac{1+\lambda}{2} j_B - \frac{\lambda-1}{2} j_A =$$

$$= \frac{1}{2} (j_B + j_A) + \frac{\lambda}{2} (j_B - j_A)$$

↓
prcd Fermiego

prcd
Gamow - Tellera

Myieli proton lub no neutron
mo mały energii kinetycznej &
porównaniu z jego masą

$$v_N \approx v_N, \quad v_p \approx v_p \quad \text{i wówczas}$$

$$\frac{j_B + j_A}{2} \rightarrow \left[v_p^* v_N, \vec{0} \right]$$

$$\frac{j_B - j_A}{2} \rightarrow \left[0, -v_p^* \vec{\sigma} v_N \right]$$

5) Prąd leptonowy w postaci:

$$\nu_e^* \sigma_\mu \nu_\nu \quad \sigma_\mu = (1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

więc dla rozpadu typu Fermiego

$$G (\nu_p^* \nu_n) \cdot (\nu_e^* \nu_\nu) + \text{Fermi}$$

$$+ \lambda \cdot G (\nu_p^* \vec{\sigma} \nu_n) \cdot (\nu_e^* \vec{\sigma} \nu_\nu) \quad \text{GT}$$

Możemy jednak oddziaływanie słabe zapisać w postaci

$$\left(\frac{1+\lambda}{2} \right) j_B^h j_B^l - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) j_A^h j_B^l$$

hadron
lepton
hadron
lepton

$$\frac{1+1.26}{2} = 2.13$$

$$\frac{\lambda-1}{2} \approx \frac{0.26}{2} = 0.13$$

6)

Ilsoryn prądów typu $j_n^{\mu B} j_l^{\mu B}$

$$= (\psi_p^* \sigma_n \psi_N) (\psi_e^* \sigma_n \psi_r) =$$

był analizowany na poprzednich
zajęciach i został wyrażony

$$= (\psi_p^* \cdot \psi_e)^* \cdot (\psi_N \cdot \psi_r) \quad \text{gdzie}$$

$$\psi_p \cdot \psi_e = \psi_p^+ \psi_e^- - \psi_p^- \psi_e^+$$

mierzenie w przekroju B.

Ilsoryn prądów $j_A^{\mu} j_B^{\mu} =$

$$= (\psi_p^* \psi_N, \psi_p^* \vec{\sigma} \psi_N) (\psi_e^* \psi_r, -\psi_e^* \vec{\sigma} \psi_r)$$

$$= (\psi_p^* \psi_N) (\psi_e^* \psi_r) + \psi_p^* \vec{\sigma} \psi_N (\psi_e^* \vec{\sigma} \psi_r)$$

znak \oplus , inny niż przy

spisaniu $j_B j_B$.

7

$$j^A j^B = 2 \left(u_p^{*-} v_n^- + u_p^{*+} v_n^+ \right) \cdot \left(u_n^+ v_e^{*+} + u_n^- v_e^{*-} \right)$$

Pamiętajcie jak transformuje się $A^+ \rightarrow B$

$$u^{*-} \rightarrow +v^+$$

$$u^{*+} \rightarrow -v^-$$

$$v^{*-} \rightarrow -u^+$$

$$v^{*+} \rightarrow +u^-$$

jest to iloczyn dwóch mianowników w przestrzeni A i B.

Przyjmując, podobnie jak na zajęciach

$$u_p = v_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_+ \sqrt{M_p} \text{ lub } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_- \sqrt{M_p}$$

$$u_N = v_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{M_N}$$

neutron

8

elektron

$$+ \nu_e = e^{-i\omega/2} \begin{pmatrix} \cos \theta_e/2 \\ \sin \theta_e/2 \end{pmatrix} \sqrt{m_e} \quad \text{lub}$$

$$- \nu_e = e^{i\omega/2} \begin{pmatrix} -\sin \theta_e/2 \\ \cos \theta_e/2 \end{pmatrix} \sqrt{m_e}$$

neutrino

$$\nu_\nu = \sqrt{E_\nu} \begin{pmatrix} -\sin \theta_\nu/2 \\ \cos \theta_\nu/2 \end{pmatrix}$$

Dostaję
P e

4 amplitudy
 $\times \sqrt{M_N M_P M_e E_\nu}$

palaryzacji
protonu i
elektronu

A_1	+	+	$e^{-i\omega/2} \left[\lambda \sin \frac{\theta_e - \theta_\nu}{2} + \sin \frac{\theta_e + \theta_\nu}{2} \right]$
A_2	-	+	$-2e^{-i\omega/2} \lambda \cdot \cos \frac{\theta_e}{2} \cdot \cos \frac{\theta_\nu}{2}$
A_3	+	-	$e^{i\omega/2} \left[\lambda \cos \frac{\theta_e - \theta_\nu}{2} + \cos \frac{\theta_e + \theta_\nu}{2} \right]$
A_4	-	-	$+2e^{i\omega/2} \lambda \cdot \cos \frac{\theta_\nu}{2} \sin \frac{\theta_e}{2}$

g) ω przyrodnie liczy $\lambda = 1$

$$A_1^2 + A_2^2 \propto e^{-\omega} \cdot 2 \left(1 + \cos \theta_r\right)$$

$$A_3^2 + A_4^2 \propto e^{\omega} \cdot 2 \left(1 + \cos \theta_r\right)$$

Co jest ν zgodnie z rozkładem
kątów wlotu anty neutrino względem
kierunku polaryzacji: neutronu.

(10)

Relatywistyczne funkcje falowe fermionu o panyztości +

Rzut na lew. ruku (+)

Rzut spinu na lew. ruku (-)

$$\begin{array}{l}
 \text{A) } u \\
 \text{B) } v
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc}
 e^{w/2} \cos(\theta/2) & e^{-i\varphi/2} \\
 e^{w/2} \sin(\theta/2) & e^{i\varphi/2}
 \end{array} \right] \sqrt{m} \\
 \left[\begin{array}{cc}
 e^{-w/2} \cos(\theta/2) & e^{-i\varphi/2} \\
 e^{-w/2} \sin(\theta/2) & e^{i\varphi/2}
 \end{array} \right] \sqrt{m}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc}
 -e^{-w/2} \sin(\theta/2) & e^{-i\varphi/2} \\
 e^{-w/2} \cos(\theta/2) & e^{i\varphi/2}
 \end{array} \right] \sqrt{m} \\
 \left[\begin{array}{cc}
 e^{w/2} \sin(\theta/2) & e^{-i\varphi/2} \\
 +e^{w/2} \cos(\theta/2) & e^{i\varphi/2}
 \end{array} \right] \sqrt{m}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 u \\
 v
 \end{array}$$

$$u_+^* = e^{w/2} \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} = e^{w/2} \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2}$$

①

Wykład 11

112

Wstęp

Na wykładzie 4 (str 32)
zostały wprowadzone reprezentacje
iskusynowe stanów $|+\rangle$ i $|-\rangle$ z
reprezentacji: $\frac{1}{2}$

$$|p, m\rangle \equiv \sqrt{\frac{p! m!}{(p+m)!}} \sum \left\{ \begin{array}{c} p \text{ plusów} \quad m \text{ minusów} \\ + + + + +, - \dots - \end{array} \right\}$$

↑
operator symetryzacji

Zostało pokazane, że

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \sum \vec{\sigma}_i$$

$$\hat{I}_z |p, m\rangle = \frac{p-m}{2} |p, m\rangle$$

$$\hat{I}^2 |p, m\rangle = \frac{I(I+1)}{2} |p, m\rangle$$

↑
 $I = \frac{p+m}{2}$

$$I_+ |I, M\rangle = \sqrt{(I+M+1)(I-M)} |I, M+1\rangle$$

②

Rozkład dowolnej reprezentacji:
np. iloczyn dwóch reprezentacji:

Jako przykład rozważ 4
 stany $3/2$ i rozkład $3/2 = 1 \otimes 1/2$

$$|3/2, 3/2\rangle = |+++ \rangle$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ | - + + \rangle + | + - + \rangle + | + + - \rangle \right\}$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ | + - - \rangle + | - + - \rangle + | - - + \rangle \right\}$$

$$|3/2, -3/2\rangle = | - - - \rangle$$

~~Stany~~ Stany $(1, m)$ mają postać

$$|1, 1\rangle = | + + \rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{| + - \rangle + | - + \rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|1, -1\rangle = | - - \rangle$$

Stan $|3/2, 1/2\rangle$ można zapisać

$$|3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2} \left[\frac{| - + \rangle + | + - \rangle}{\sqrt{2}} \right] | + \rangle + \frac{| + + \rangle | - \rangle}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle |1/2, 1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1\rangle |1, -1/2\rangle$$

③ Postępujse podobnie

114

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -1\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

oraz

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, 1\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1, -1\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

Ogólnie z dwóch reprezentacji:
 $|j_1, m_1\rangle$ i $|j_2, m_2\rangle$ możemy złożyć
 $j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$ reprezentacje
reprezentacji.

Niech $j_1 \geq j_2$. Ilości stanów

$$|j_1, m_1\rangle \cdot |j_2, m_2\rangle \text{ wynosi } (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Np: $j_1 = 2, j_2 = 1$ możemy złożyć

3, 2, 1

$$\text{Ilości stanów } (2 \cdot 2 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$$

z drugiej strony

$$(2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) = 7 + 5 + 3 = 15$$

4

115

Ogólnie

$$2(j_1+j_2)+1 + 2(j_1+j_2-1)+1 + \dots + 2(j_1-j_2)+1 =$$

$$\text{Człownik jest } j_1+j_2 - j_1+j_2+1 = 2j_2+1$$

$$= 2 \left[(1+\dots+j_1+j_2) - (1+2+\dots+j_1-j_2-1) \right] + 2j_2+1$$

$$= 2 \left[\frac{(j_1+j_2)(j_1+j_2+1) - (j_1-j_2-1)(j_1-j_2)}{2} \right] + 2j_2+1 =$$

$$\text{gdzie } 1+2+\dots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1) - (j_1-j_2-1)(j_1-j_2) + 2j_2+1 =$$

$$= (j_1+j_2)^2 - (j_1-j_2)^2 + \overbrace{j_1+j_2+j_1-j_2}^{2j_1} + 2j_2+1$$

$$= \underbrace{(j_1+j_2+j_1-j_2)}_{2j_1} \underbrace{(j_1+j_2-j_1+j_2)}_{2j_2} + 2j_1+2j_2+1$$

$$= 2j_1 \cdot 2j_2 + 2j_1 + 2j_2 + 1$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1) \quad \square$$

Wykazalem, ze w ogólnym przypadku
suma wymiarów baz reprezentacji

j_1+j_2, \dots, j_1-j_2 jest równa iloczynowi

wymiarów reprezentacji: $(2j_1+1) \times (2j_2+1)$

5

Definicja

$$|I, M\rangle = \sum_m \left[(j_1, m, j_2, M-m | I, M) \right] |j_1, m\rangle |j_2, M-m\rangle$$

Współczynniki Clebscha - Gordana

Obliczanie współczynników C-G dla

$$I = j_1 + j_2$$

Rozmiar pomieszczenia przytaczal reprezentacji: $j_1 = 1$ i $j_2 = 1/2$

Podziatam na stan

$$|1, -1\rangle |1/2, -1/2\rangle \text{ operatorem } I_+ = j_1^+ + j_2^+$$

$$j_1^+ |1, -1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle$$

$$j_2^+ |1/2, -1/2\rangle = 1 \cdot |1/2, 1/2\rangle$$

$$I_+ = (j_1^+ + j_2^+) |1, -1\rangle |1/2, -1/2\rangle = I_+ |3/2, -3/2\rangle =$$

$$= |1, 0\rangle \sqrt{2} \cdot |1/2, -1/2\rangle + |1, -1\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$= \sqrt{2} |1, 0\rangle |1/2, -1/2\rangle + 1 |1, -1\rangle |1/2, 1/2\rangle$$

$$\textcircled{6} \quad I_+ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1 \right) \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) \right)} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Stany $\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$ i $\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ są

nie normowane.

$$(j_1^+ + j_2^+) \left| 1, -1 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle =$$

$$= \sqrt{3} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, -1 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right]$$

Schemat obliczania współł. CG dla
maksymalnej reprezentacji: j_1, j_2

$$I_+ \left| j_1, -j_1 \right\rangle \left| j_2, -j_2 \right\rangle \longrightarrow I_+ \left| j_1 + j_2, -j_1 - j_2 \right\rangle =$$

$$\rightsquigarrow = \sqrt{2(j_1 + j_2)} \left| j_1 + j_2, -j_1 - j_2 + 1 \right\rangle =$$

$$= (j_1^+ + j_2^+) \left| j_1, -j_1 \right\rangle \left| j_2, -j_2 \right\rangle =$$

$$= \sqrt{2j_1} \left| j_1, -j_1 + 1 \right\rangle \left| j_2, -j_2 \right\rangle + \sqrt{2j_2} \left| j_1, -j_1 \right\rangle \left| j_2, -j_2 + 1 \right\rangle$$

stąd np:

$$\left(j_1, -j_1 + 1, j_2, -j_2 \mid j_1 + j_2, -j_1 - j_2 + 1 \right) = \sqrt{\frac{2j_1}{2(j_1 + j_2)}}$$

7) własności

1) z ortogonalności stanów wynika

$$\sum (j_1, m_1, j_2, m_2 | I_1, m_1 + m_2) (j_1, m_1, j_2, m_2 | I_2, m_1 + m_2) = \delta_{I_1 I_2}$$

Przykład

$$|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -1\rangle |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$$

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1, 0\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$$

Skonstruowano dwie stany

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \text{ i } |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$$

Dowód, że stan $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ transformuje się jak stan $\frac{1}{2}$.

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} - 2 \frac{|--\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{|+\ominus\rangle - |-\ominus\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\ominus+\rangle - |\ominus-\rangle}{\sqrt{2}} \right]$$

pamiętaj, że $\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = |0, 0\rangle$

8

Odwrotny rozkład

119

Przykład

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1, -1 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1, 0 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -1 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Mnożąc 1 równanie przez $\sqrt{\frac{2}{3}}$, drugie
 przez $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i dodając stronami

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| 1, 0 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Ogólnie, współczynnik stojący
 przy rozkładzie stanu $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$
 o określonym mac. spinie

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum (j_1, m_1, j_2, m_2 | I, m_1 + m_2 \rangle$$

na stany o określonym spinie i jego
 rzucie ma osi kwantyzacji
 jest współczynnikiem C-G.

9

Rozkłady iloczynów kartezjańskich

120

Podstawowych reprezentacji grupy L .

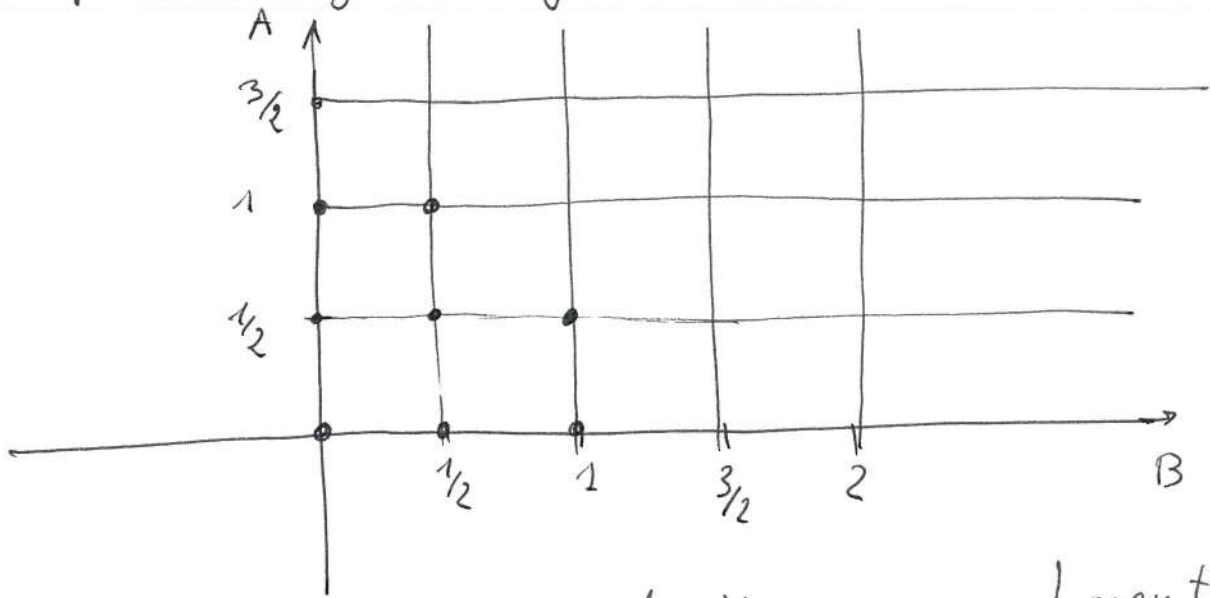


Diagram reprezentacji grupy Lorentza.

Struktura czasoprzestrzeni opisująca jest parą reprezentacji

$$\begin{matrix} A & B \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{matrix} \text{ transformujących się}$$

jak przestrzeni A i B.

jak iloczyn kartezjański

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

reprezentacji wyraża się parą reprezentacji podstawowe?

Wynikiem jest powyższej reprezentacji: $4 \times 4 = 16$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = (0, 0) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0) \oplus (1, 1)$$

⑩ Wyniaar reprezentacji:

$$(0,0) \rightarrow 1$$

$$(0,1) \rightarrow 3$$

$$(1,0) \rightarrow 3$$

$$(1,1) \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$$

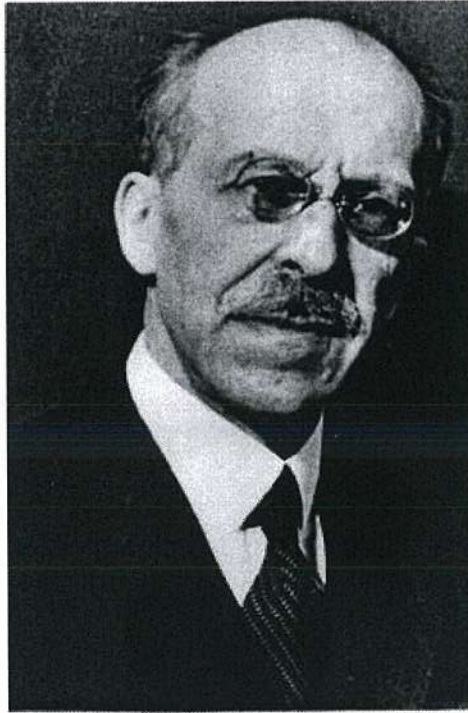
Razem wyniaar "bary" wynosi
 $1 + 3 + 3 + 9 = 16$ co egualno ni
 2 wyniaorem wszystkich stanów
 $4 \times 4 = 16$

Wstęp

Wykład 5 podaje sposób konstrukcji bazy reprezentacji grupy obrotów przestrzennych i pewnie Lorentze.

Niech dana będzie reprezentacja algebry $\hat{\mathfrak{J}}_i$, własna grupa obrotów wzdłuż kierunku i o kąt φ ma postać

$$R_i(\varphi) = e^{-i\varphi \hat{J}_i}$$

*I. Schur*

Issai Schur (ur. 10 stycznia 1875 w Mohylewie, zm. 10 stycznia 1941 w Tel Awiwie) – niemiecki matematyk. W 1901 roku uzyskał doktorat na Uniwersytecie Humboldta, w 1903 objął tam stanowisko wykładowcy. W latach 1911-1916 wykładał w Bonn, skąd wrócił do Berlina, a w 1919 roku został mianowany profesorem.

Schur był z pochodzenia Żydem, choć sam uważał się za Niemca i mówił po niemiecku. Mimo zaproszeń z Wielkiej Brytanii i Stanów Zjednoczonych nie chciał opuścić hitlerowskich Niemiec. Jednak już w roku 1935 musiał złożyć stanowisko, a w 1938 zmuszono go do rezygnacji z członkostwa w Pruskiej Akademii Nauk. W końcu wyemigrował do Palestyny i ostatnie lata życia spędził w ubóstwie^[1].

Główne prace Schura dotyczą teorii reprezentacji grup, choć zajmował się także kombinatoryką i fizyką teoretyczną. /Za Wikipedią/

Grupa obrotów \mathbb{R}^3 przestrzeni 3-wymiarowej

Niech zadana będzie grupa skończona
 G z elementami $U_i \quad i = \{1, \dots, g\}$

$$1) U_i \cdot U_j = U_k \in G$$

$$2) U_i \Rightarrow U_i^{-1} \text{ taki, że } U_i \cdot U_i^{-1} = 1$$

3) istnieje element jednostkowy

$$4) (U_i \cdot U_k) \cdot U_l = U_i \cdot (U_k \cdot U_l)$$

Lemat Schurera:

A) jeżeli $D(U)$ jest elementem (macierz)
nieprzywiedlną reprezentacji grupy

G i jeżeli dla każdego $U \in G$

$$D(U) \cdot \hat{M} = \hat{M} \cdot D(U), \text{ to } \hat{M} \text{ jest}$$

proporcjonalne do macierzy
jednostkowej.

Zachodzi

$$D(U_1 U_2) = D(U_1) \cdot D(U_2)$$

$$D(1) = \hat{1}$$

2)

125

B) Jakieli $D(u)$ i $D'(u)$ są

elementami dwóch różnych

nieprzerwanych reprezentacji: grupy G

i jakieli dla każdego $u \in G$

$$D(u) \cdot \hat{M} = \hat{M} \cdot D'(u) \text{ to } M$$

jest macierzą zerową.

Przykłady: obroty wokół osi y

Spin $1/2$

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = D(\theta) = e^{-i \frac{\theta}{2} \sigma_y}$$

Spin 1

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\cos \theta}{2} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos \theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \theta}{2} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos \theta}{2} \end{bmatrix} = e^{-i \theta \frac{\sigma_y}{2}}$$

dla spinu
1

3)

Konstrukcja macierzy \hat{M} (Schura¹³⁶)
 $D(u)$ i $D'(u)$ reprezentacji

$$\hat{M} = \sum_{u \in G} D(u) \cdot \hat{X} \cdot D'(u^{-1})$$

↑ dowolna macierz!

$$D(u') \cdot \hat{M} \cdot D'(u'^{-1}) = \sum_{u \in G} \underbrace{D(u') \cdot D(u)} \cdot \hat{X} \cdot D(u^{-1}) \cdot D'(u'^{-1})$$

$$1) D(u^{-1}) \cdot D(u'^{-1}) = D((u' \cdot u)^{-1})$$

$$= \sum_{u'' \in G} D(u'') \cdot \hat{X} \cdot D'(u''^{-1}) = \hat{M}, \text{ gdzie}$$

u'' przebiega całą grupę S

gdzie $u'' = u' \cdot u$

stąd

$$D(u') \cdot \hat{M} = \hat{M} \cdot D'(u')$$

lemat Schur

$$M = c \cdot \hat{I}, \text{ gdy } D \text{ i } D' \text{ to same rep.}$$
$$M = 0, \text{ gdy } D \text{ i } D' \text{ różne rep.}$$

4)

Zastosowani do grupy obrotów 127

Niech elementy grupy mają postać

$$e^{+i\psi I_z} \cdot e^{+i\theta I_y} \cdot e^{+i\phi I_z} = \mathcal{R}^I(\vec{\omega})$$

Dla reprezentacji: 3, 5, 7, ... wymiarowych

$$\psi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]$$

Miara: $\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\phi [F]$

Dł $F=1$ „objętość” grupy wynosi

$$V = 2 \cdot 2\pi \cdot 2\pi = 8\pi^2$$

Rozmiar macierzy $2I+1$

Macierz $\mathcal{R}^I(\omega)$ ma elementy

macierzowe $\mathcal{D}_{MM'}^I(\vec{\omega})$, gdzie

$$\vec{\omega} = \{\psi, \theta, \phi\}$$

Funkcje Wignera

Macierz obrotu jest macierzą unitarną - nie zmienia iloczynu skalarnego

$$(\mathcal{R}^\mp \eta_1, \mathcal{R}^\mp \eta_2) = (\eta_1, \eta_2)$$

5/

Zatem wykorzystując Lemat Schur zwi3dzi ortogonalno5ci mo3na otrzyma:

$$\hat{M} = \sum_{u \in G} D(u) \cdot \hat{X} (D(u))^{-1}$$

① Reprezentacje identyczne
grupy obrotów

$\hat{X} =$ wzrostki elementy zero
prócz elementu $j'k$ równego 1

$$(\hat{X})_{j'k'} = \delta_{j'j} \cdot \delta_{k'k}$$

$$D(u) = \mathcal{D}_{MM'}^I(\vec{\omega})$$

Ponieważ ~~grupa~~ reprezentacja grupy obrotów są unitarne

$$R^{-1}(\omega) = R^\dagger(\omega)$$

$$(R^{-1}(\omega))_{kl} = \hat{X} (R(\omega))_{lk}^*$$

$$M_{ML} = \sum_{u \in G} \mathcal{D}_{MM'}^I(\omega) \delta_{M'j} \delta_{kM''} \mathcal{D}_{LM''}^{*I}(\omega)$$

$$\mathcal{D}_{M''L}^I(\omega)$$

$$(6) \quad (M)_{ML} = \int \mathcal{D}_{LK}^{*I} \mathcal{D}_{Mj}^I d\omega \stackrel{=}{=} c_{kj} \delta_{LM}$$

↑
lemmat Schur'a

$$\int \mathcal{D}_{LK}^{*I} \mathcal{D}_{Lj}^I d\omega = c_{kj} \quad \text{dla } L \in (-I, I)$$

Ale dla określonego k₃ to zachodzi

$$\sum_L \mathcal{D}_{LK}^{*I}(\omega) \mathcal{D}_{Lj}^I(\omega) = \delta_{kj}$$

stąd

$$\sum_L \left(\int \mathcal{D}_{LK}^{*I} \mathcal{D}_{Lj}^I d\omega \right) = (2I+1) c_{kj}$$

$$= \int \left(\sum_L \mathcal{D}_{LK}^{*I} \mathcal{D}_{Lj}^I \right) d\omega = \delta_{kj} \cdot 8\pi^2$$

$$\text{stąd} \quad c_{kj} = \delta_{kj} \frac{8\pi^2}{2I+1}$$

⑦ Możliwe zatem wyrażenie

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \, \mathcal{D}_{M_1 M_2}^{* I_1}(\omega) \mathcal{D}_{M_1' M_2'}^{I_2}$$

$$= \frac{8\pi^2}{2I_1 + 1} \underbrace{\mathcal{Z}_{I_1 I_2}}_{\downarrow} \mathcal{Z}_{M_1 M_1'} \mathcal{Z}_{M_2 M_2'}$$

Związek zachodzi np. drodze podobnego rozumowania wykorzystując drugą część lematu Schura.

$$|I, M\rangle = \sum Q_{MK}^I(\omega) |I, K\rangle$$

Funkci faly 5 u utadri laboratorijny

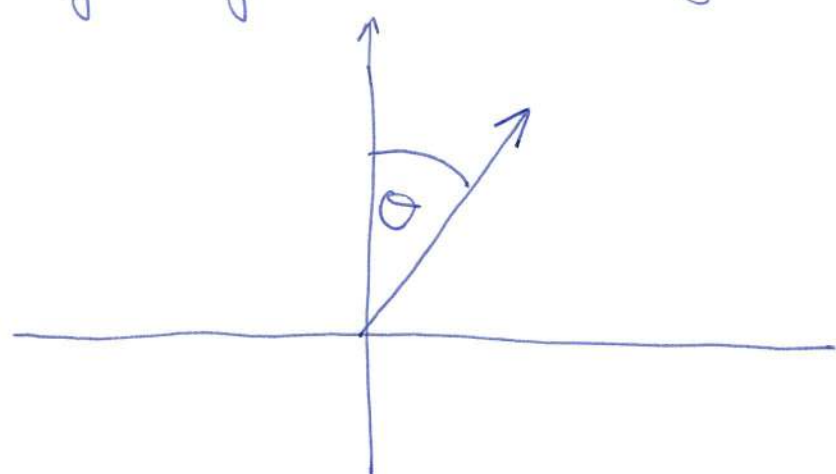
Funkci faly 5 u utadri wizenym 2 jedrom lub molekuly

Pouyie funkcij faly ~~wizyrate~~ utadri laboratorijny opisuyi jedro 5

Pryklad

Emissi fotone 2 jedro 0 spini

1



pryjoni $|1, 1\rangle_{Nucleus} \rightarrow |0, 0\rangle_{Nucleus}$ 2 emissi

g) fotonu prawo skrętnego lub lewo-skrętnego (132)

$$\left| \mathcal{D}_{1,-1}^1 \right|^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2 \quad \text{foton lewo skrętny}$$

$$\left| \mathcal{D}_{1,1}^1 \right|^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \quad \text{foton prawo skrętny}$$

Ponieważ zachodzi

$$\mathcal{R}(\omega_1) = \mathcal{R}(\omega) \mathcal{R}(\omega_1') \quad \text{to}$$

$$\mathcal{D}_{M(M')}^I(\omega_1) = \sum_{M_1} \mathcal{D}_{MM_1}^I(\omega) \mathcal{D}_{M_1(M')}^I(\omega_1')$$

funkcji $\mathcal{D}_{M(M')}^I(\omega'') = |I, M\rangle$

są funkcjami falowymi np

cząstki w układzie laboratoryjnym

Szczególny przypadek

$$\mathcal{D}_{0M,0}^I = \sqrt{\frac{4\pi}{(2I+1)}} Y_{I,M}(\theta, \varphi)$$

①

Wykład 15

(133)

Prawdopodobieństwo przejść
elektromagnetycznych

Z wykładu (11) wiadomo, że
ilość dwóch stanów (współczynnik G-G)

$$(*) \quad |I_1, M_1\rangle |I_2, M_2\rangle = \sum_J \langle I_1, M_1, I_2, M_2 | J, M \rangle |J, M\rangle$$

suma po J od $|I_1 - I_2|$ do $I_1 + I_2$

Z wykładu (12) wynika, że
funkcje $|I, M\rangle$ wyrażone mogą być
w obroconym układzie z pomocą
funkcji: Wignera $\mathcal{D}_{M, M'}^I$

$$|I, M\rangle = \sum_{M'} \mathcal{D}_{M M'}^I |I, M'\rangle$$

"Obróćmy" obie strony równań o
kąt $\vec{\omega} = (\chi, \theta, \varphi)$

$$\sum_{M_1', M_2'} \mathcal{D}_{M_1 M_1'}^{I_1} \mathcal{D}_{M_2 M_2'}^{I_2} |I_1, M_1'\rangle |I_2, M_2'\rangle =$$

②

(134)

$$= \sum_J \langle I_1, M_1, I_2, M_2 | J, M \rangle \mathcal{D}_{MM'}^J |J, M'\rangle$$

Ali wiadomo, że $|J, M'\rangle$ można

zapisać jako

$$|J, M'\rangle = \sum_{M_1', M_2'} \langle I_1, M_1', I_2, M_2' | J, M' \rangle |I_1, M_1'\rangle |I_2, M_2'\rangle$$

Porównując współczynniki przy $|I_1, M_1'\rangle |I_2, M_2'\rangle$ otrzymujemy

$$\mathcal{D}_{M_1 M_1'}^{I_1}(\omega) \mathcal{D}_{M_2 M_2'}^{I_2}(\omega) =$$

$$\langle I_1, M_1, I_2, M_2 | J, M \rangle \langle I_1, M_1', I_2, M_2' | J, M' \rangle \times$$

$$\times \mathcal{D}_{MM'}^J$$

3

N_φ vztahovci (12) pokazano, i 135
zachodci

(*) *
$$\int \mathcal{D}_{KL}^{*I}(\omega) \mathcal{D}_{MM'}^J(\omega) d\omega = \frac{8\pi^2}{2I+1} \delta_{IJ} \delta_{KM} \delta_{LM'}$$

gdie
$$\int d\omega = \int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi d\psi d\phi$$

Mnozice obci stony puz ilscuju
vz. C-G dostaji

$$\int \mathcal{D}_{KL}^{*I} \mathcal{D}_{M_1 M_1'}^{I_1} \mathcal{D}_{M_2 M_2'}^{I_2} d\omega =$$

$$= \frac{8\pi^2}{2I+1} \delta_{I,J} \delta_{K,M} \delta_{L,M'} \langle I_1, M_1, I_2, M_2 | J, M \rangle \cdot$$

$$\langle I_1, M_1', I_2, M_2' | J, M' \rangle =$$

$$= \frac{8\pi^2}{2I+1} \langle I_1, M_1, I_2, M_2 | I, K \rangle \langle I_1, M_1', I_2, M_2' | I, L \rangle$$

4

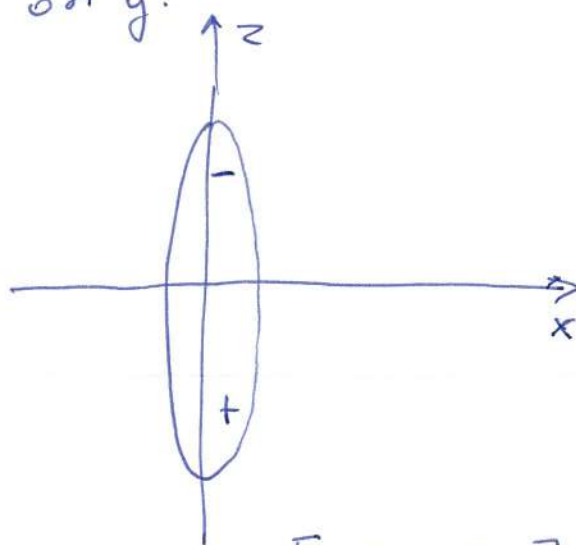
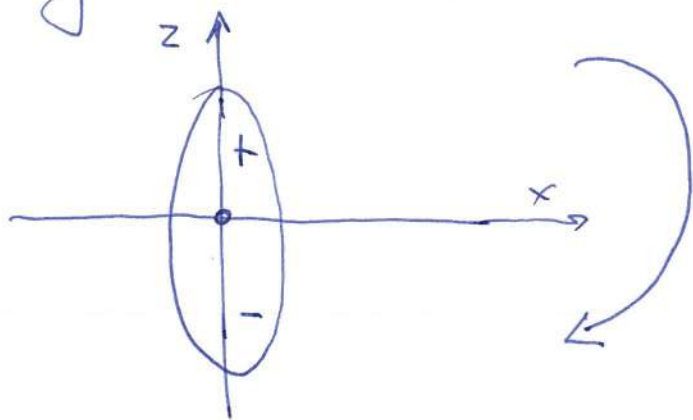
Funkcja falowa

$$|I, M\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sum_k D_{Mk}^I |I, k\rangle$$

Funkcja falowa w układzie laboratoryjnym.

Funkcja falowa w układzie związanym z jądrem

Dziatanie obrotu o π wokół osi y.



$$D_y = e^{+i\pi \frac{\sigma_y}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sigma_y \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5

Dostaję system

$$R_y |+\rangle = -|+\rangle, \quad R_y |-\rangle = +|+\rangle$$

$$|I, M\rangle = N \cdot \text{Sym} | \overset{p}{+}_1 \overset{m}{+}_1 \dots +, \dots \rangle$$

$$\frac{p+m}{2} = I, \quad \frac{p-m}{2} = M$$

$$R_y |I, M\rangle = N \cdot \text{Sym} | \overset{p}{-} \dots \overset{m}{+} \dots \rangle \cdot (-1)^p$$

$$= (-1)^p |I, -M\rangle = (-1)^{I+M} |I, -M\rangle$$

$$I - M = m, \quad I + M = p$$

$$R_y |I, M\rangle = (-1)^{I+M} |I, -M\rangle$$

węzłowiec $\rightarrow R_i = R_y, \quad R_e = R_y \leftarrow$ laboratorium
Symetria osiowa

$$|I, M\rangle = \frac{1 + R_i^{-1} R_e}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \sum_{K, J} D_{MK}^I |J, K\rangle$$

$$R_i^{-1} R_e \sum_K D_{MK}^I |I, K\rangle = \sum_{K, J} (-1)^{I+M} D_{M-K}^I |J, \bar{K}\rangle$$

$$\sum_J |J, \bar{K}\rangle = |\bar{K}\rangle$$

⑥ Stany $|\bar{K}\rangle$ mi mają określonego momentu pędu. (138)

$$|K, I, M\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} \left[\sum_K D_{M,K}^I |K\rangle + (-1)^{I+K} D_{M,-K}^I |\bar{K}\rangle \right]$$

Operatory pędu

$$T_{I\mu} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^I T'_{I\nu}$$

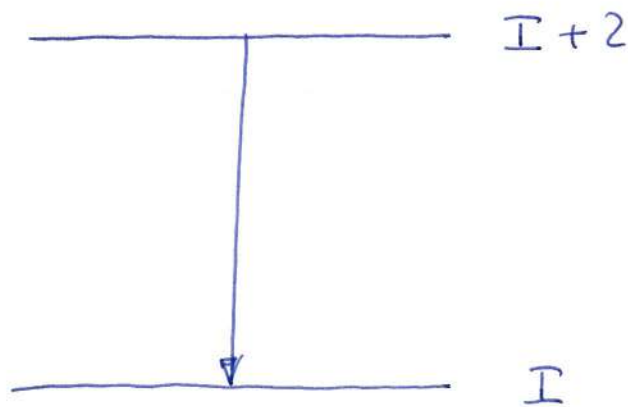
operator w układzie zewnętrznym

operator w układzie wewnętrznym

Przykład

$$T_{2\mu}^{E2} = \frac{e}{2} Q_0 \cdot D_{\mu 0}^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

⑧ Ogólni przejściowe momenty przejściowe (138)



$$A = \langle I, M_1 | \frac{e}{2} Q_0 D_{00}^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} | I+2, -M_1 \rangle$$

$$= \frac{e}{2} Q_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \sqrt{\frac{2I+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2I+5}{4\pi}}$$

$$\cdot \int D_{M_1, 0}^{*I} D_{00}^2 D_{-M_1, 0}^{I+2} d\omega$$

Ostatnie całka równa

$$\langle I, M_1, 2, 0 | I+2, -M_1 \rangle \cdot \langle I, 0, 2, 0 | I+2, 0 \rangle$$

$$B(E2) = |A|^2$$

Po wyzniesieniu po M
otrzymuje się

7

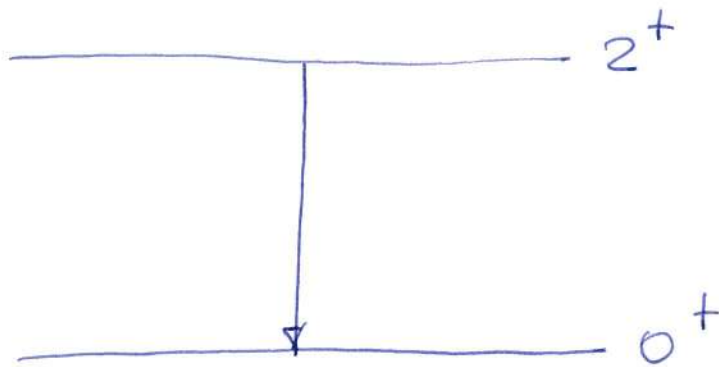
L140

Dla $K=0$ funkcje falowe
ma postać

$$|0, I, M\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{4\pi}} \mathcal{D}_{M,0}^I |0\rangle$$

dla jądrow parzysto-parzystego

$$I = 0, 2, 4, 6, \dots$$



$$\langle I_1, M_1 | \frac{e}{2} Q_0 \mathcal{D}_{00}^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} | I_2, M_2 \rangle =$$

$$I_1 = 0, M_1 = 0, I_2 = 2, M_2 = 0$$

$$= \frac{e}{2} Q_0 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{\sqrt{5}}{4\pi} \int \mathcal{D}_{00}^0 \mathcal{D}_{00}^2 \mathcal{D}_{00}^2 d\omega$$

$$= \frac{e}{2} Q_0 \frac{5}{(4\pi)^{3/2}} \underbrace{\langle 0, 0, 2, 0 | 2, 0 \rangle}_{=1}^2 = \frac{e}{2} Q_0 \frac{5}{(4\pi)^{3/2}}$$

③

$$B(E2) = \frac{5}{16\pi} e^2 Q_0^2 \left| \langle I_1, K=20 | I_2, K \rangle \right|^2$$

$$\text{for } K \geq 0$$

①

Wykład 14

142

W niniejszym wykładzie zostaną przedstawione główne idee ukarane w wykładach 1-13.

Generatory obrotów przestrzennych [2]

$$I_x = i \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$I_y = i \left(x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$I_z = i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{spełniając warunki}$$

$$[I_x, I_y] = i I_z \quad \text{i cyklicznie.}$$

Generatory transformacji Lorentza [3]

$$O_x = \left(x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$O_y = \left(y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$O_z = \left(z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{spełniając}$$

$$[O_x, O_y] = i I_z$$

$$[O_x, I_y] = i O_z$$

Zdefiniowanie generatorów

$$A_i = \frac{1}{2} [I_i + O_i] \quad \text{i}$$

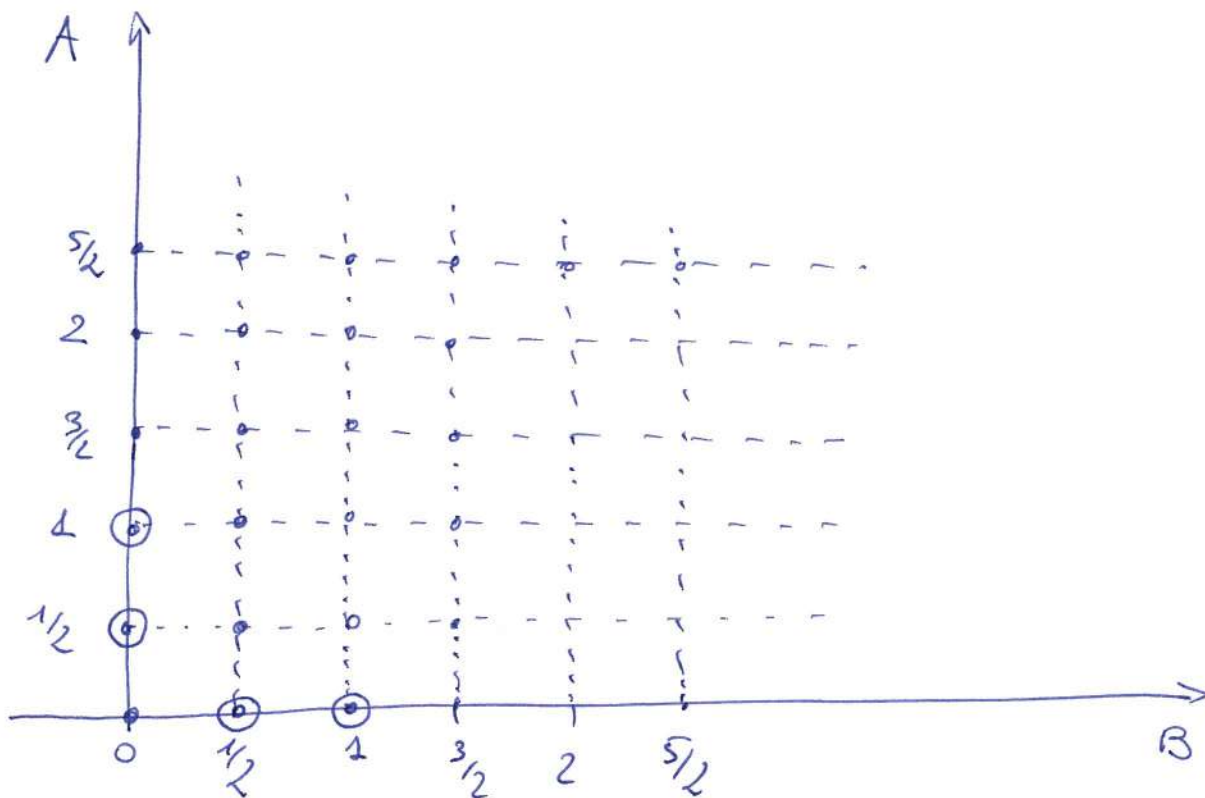
$$B_i = \frac{1}{2} [I_i - O_i] \quad \text{prowadzi}$$

do wzrków komutacyjnych

	$[A_i, B_j] = 0$ dla dowolnych i, j
A	$[A_i, A_j] = i \epsilon_{ijk} A_k$
B	$[B_i, B_j] = i \epsilon_{ijk} B_k$

$$I_i = A_i + B_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$O_i = A_i - B_i$$



Reprezentacji macierzowe
generatorów A i B

$$\vec{A} = [\hat{A}_x, \hat{A}_y, A_z]$$

$$\vec{B} = [\hat{B}_x, \hat{B}_y, \hat{B}_z]$$

3)

Reprezentacji algebry Lorentza

145

 $\left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right\}$

$$A_i = \frac{1}{2} \sigma_i \quad \leftarrow \text{matryce Pauliego}$$

$$B_i = -\frac{1}{2} \sigma_i \quad \leftarrow$$

Równanie Weyla

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} W_+ = +W_+ \quad \text{dla p. A}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} W_- = -W_- \quad \text{dla p. B}$$

$$W_+ = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix}, \quad W_- = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi/2} \\ \cos \frac{\theta}{2} & e^{+i\varphi/2} \end{bmatrix}$$

Grupa Lorentza

	obrot	przebieg
A	$e^{-i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$	$e^{+\frac{w}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$
B	$e^{-i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$	$e^{-\frac{w}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$

4)

195

Nierzmiennikiem tej grupy jest
— dla dwóch spinorów — w przekształceniach

$$A : B$$

$$\begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B^+ \\ B^- \end{pmatrix}$$

$$\frac{A_1^+ A_2^- - A_1^- A_2^+}{\sqrt{2}}, \quad \frac{B_1^+ B_2^- - B_1^- B_2^+}{\sqrt{2}}$$

Uwaga: Spinorami rzeczywistymi spinorami

$$A^* \longrightarrow B$$

$$A^{*+} \longrightarrow -B^-$$

$$A^{*-} \longrightarrow +B^+$$

Zatem wyrażenie typu

$$\boxed{A_1^{*+} B_2^+ + A_1^{*-} B_2^- = A_1^{*i} B_2^i}$$

$$= -B_1^- B_2^+ + B_1^+ B_2^- \leftarrow \text{nierzmiennik}$$

5

Wybion wtedy własne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{A,B} = |+\rangle_{A,B} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{A,B} = |-\rangle_{A,B}$$

Możemy utworzyć obicłoty z $|+\rangle_A |+\rangle_B$
 $|-\rangle_A |+\rangle_B$ transformujące się pod
 wpływem grupy Lorentz, jak

$$t \rightarrow t \quad |-\rangle_A |+\rangle_B$$

$$x + iy \rightarrow x + iy \quad |+\rangle_A |+\rangle_B$$

$$- (x - iy) \rightarrow - (x - iy) \quad |-\rangle_A |-\rangle_B$$

$$- (z + t) \rightarrow - (z + t) \quad |+\rangle_A |-\rangle_B$$

Wprowadzając operator parzystości

$$t \rightarrow t \quad P |+\rangle_A = i |+\rangle_B$$

$$x \rightarrow -x \quad \Rightarrow \quad P |-\rangle_A = i |-\rangle_B$$

$$y \rightarrow -y \quad P |+\rangle_B = i |+\rangle_A$$

$$z \rightarrow -z \quad P |-\rangle_B = i |-\rangle_A$$

W bazie

numer	1	2	3	4
stan	$ +\rangle_A$	$ -\rangle_A$	$ +\rangle_B$	$ -\rangle_B$

6)

197

operator $\otimes P$ ma postać

$$\rho = i \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}$$

Wprowadzając grupę obroto ω w przestrzeni 4-wymiarowej (reprezentacji przyrodliwej)

$$Y_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$O_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}$$

możemy dokonać przekształceń

$$\otimes e^{+\omega O_i} P e^{-\omega O_i}$$

$$= \cosh \omega \cdot P - \sinh \omega \cdot \sigma^i$$

$$\gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7) Wektory własne operatore
 pozytywni ujemni postaci

$$w_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2^0$$

Wartości własne
 $+i$

$$w_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_4^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = w_4^0$$

Wartości własne
 $-i$

Bispinory opisuje cząstkę o spinie
 $\frac{1}{2}$ up. elektron.

Elektron poruszający się opisany jest
 przez

$$e^{-i\omega_0 t} w_j^0, j=1,2, \quad \oplus e^{-i\omega_0 t} w_j^0, j=3,4$$

~~Rz~~ Spinory Diraca dla elektronu
 (pozytronu) poruszającego się w
 kierunku i .

representaži 3 rymiansue

$$J_x = \begin{bmatrix} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}, \quad J_y = \begin{bmatrix} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ & \frac{i}{\sqrt{2}} & \end{bmatrix}$$

$$J_z = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

Riömami Maxwelli

$\vec{n} \vec{J} w_+ = + w_+$	$\vec{n} \vec{J} w_- = - w_-$
A	B

Spinors mazi portai

$$w_+ = \begin{bmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad w_- = \begin{bmatrix} \frac{1-\cos\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\cos\theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

9)

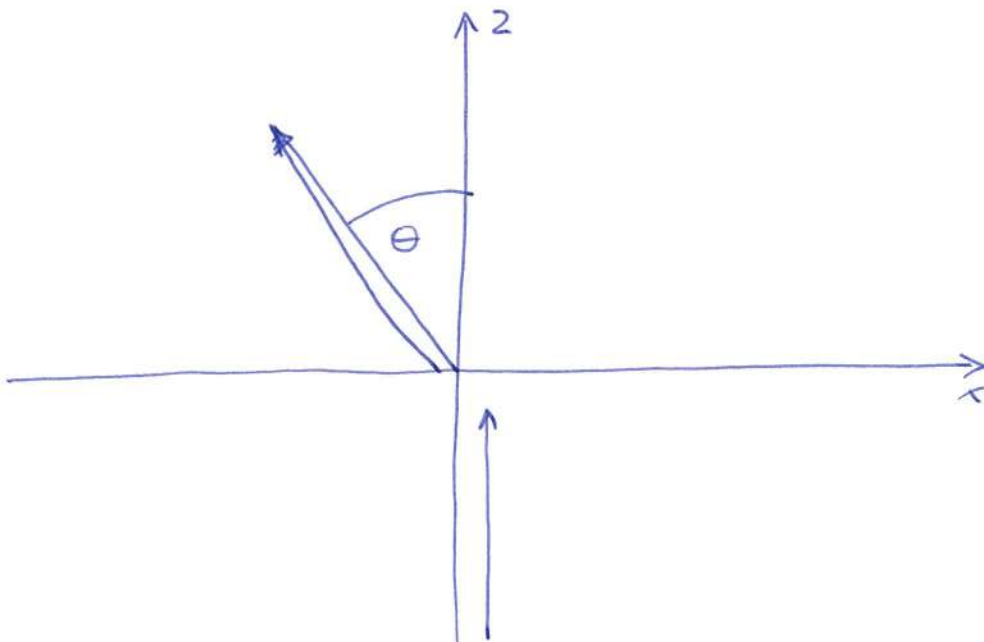
Grupa Lorentza

150

	obrot	pręgni
A	$e^{-i\varphi \vec{n} \cdot \vec{J}}$	$e^{+\omega \vec{n} \cdot \vec{J}}$
B	$e^{-i\varphi \vec{n} \cdot \vec{J}}$	$e^{-\omega \vec{n} \cdot \vec{J}}$

Nierzmienniki dla spinorów $W_1 = [W_1^+, W_1^0, W_1^-]$
 $W_2 = [W_2^+, W_2^0, W_2^-]$

$$W_1 \circ W_2 = W_1^+ W_2^- - W_1^0 W_2^0 + W_1^- W_2^+$$



podstawowy spinor $W_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, końcowy W_+

Nierzmiennik $W_0 \circ W_+ = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ dla $\varphi = 0$

10)

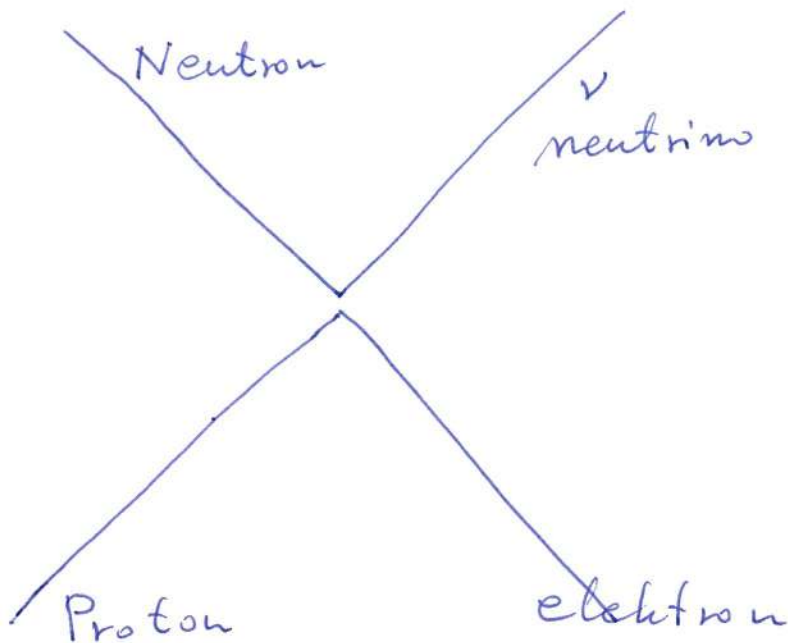
Oddziaływanie słabe leptonów

151

$$G (\bar{\nu}_p^* \sigma_\mu \nu_N) \cdot (\bar{\nu}_e^* \sigma_\mu \nu_\nu) =$$

$$= G \cdot 2 \cdot \left\{ \underbrace{(\bar{\nu}_p^+ \nu_e^- - \bar{\nu}_p^- \nu_e^+)}^* \underbrace{(\nu_N^+ \nu_\nu^- - \nu_N^- \nu_\nu^+)} \right\}$$

Nierzmienniki prądu lewej B



11) Oddziaływanie elektromagnetyczne

Efekt Comptona

Wzrost energii elementarnej maierowuży
me postaci

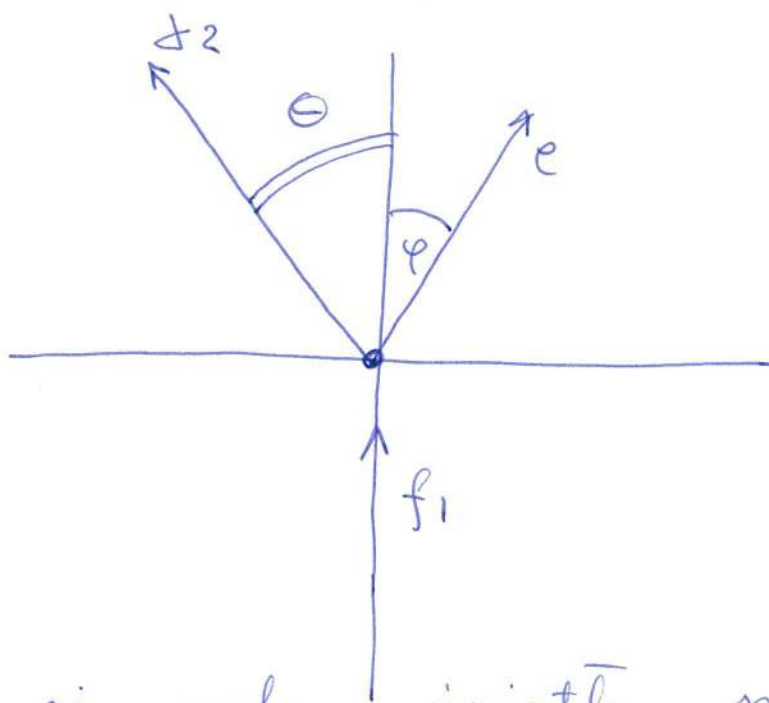
$$\tilde{u}_2 e_2 = \frac{1}{p_1 + q_1 - m} \phi_1 u_1$$

ϕ_1, p_1, q_1, e_2 - niezmienniki

$$A = A_0 \cdot \delta^0 - A_x \delta_x - A_y \delta_y - A_z \delta_z$$

Do „skomplikowanych” rachunków
otrzymujemy się

Amplitudy dla prochu polegającego na



tym, że pada światło spolaryzowane
prostopadnie i emitowane jest
prostopadnie

Natalia Sokołowska
Praca zaliczeniowa

Poniższe ćwiczenie miało na celu wykonanie zadanych obliczeń i przekształceń macierzy opisujących obroty i translacje za pomocą reprezentacji grupy przekształceń Lorentza. Zadanie wykonano w programie Mathematica 11.3

1 Jak wyglądają macierze J_+ , J_- , J_x , J_y , J_z dla reprezentacji 5-wymiarowej (spin 2)?

Postać macierzy J_+ , J_- ustalono za pomocą informacji o ich elementach macierzowych:

$$J_+|I, M\rangle = \sqrt{I + M + 1}(I - M)|I, M + 1\rangle \quad (1)$$

$$J_-|I, M\rangle = \sqrt{I - M + 1}(I + M)|I, M - 1\rangle \quad (2)$$

gdzie $I = 2$, zaś $M \in \{2, 1, 0, -1, -2\}$ Otrzymano następujące macierze J_+ , J_- :

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Korzystając ze związków łączących macierze J_+ , J_- z macierzami J_x , J_y :

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad (5)$$

$$J_y = \frac{-i}{2}(J_+ - J_-) \quad (6)$$

wyznaczono macierze J_x oraz J_y :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Wiedząc, że między macierzami J_x , J_y oraz J_z zachodzi związek komutacyjny:

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad (9)$$

wyznaczono macierz J_z :

$$J_z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Zgodnie z przewidywaniami, jest to macierz diagonalna o wartościach własnych $\{2, 1, 0, -1, -2\}$.

2 Jakie są wartości własne J_x , J_y ?

W celu wyznaczenia wartości własnych macierzy J_x oraz J_y skorzystano z funkcji **Eigenvalues** która jako argument przyjmuje macierz kwadratową, a jako wynik podaje listę wartości własnych zadanej macierzy. Otrzymało w ten sposób zestaw takich samych wartości własnych dla obu macierzy, który pokrywa się również z wartościami własnymi macierzy J_z : $\{2, 1, 0, -1, -2\}$.

3 Jak wygląda macierz obrotu wokół osi y o kąt T $D = e^{-iTJ_y}$?

Obliczona macierz obrotu D ma postać:

$$D = \begin{pmatrix} \cos^4\left(\frac{T}{2}\right) & -2\cos^3\left(\frac{T}{2}\right)\sin\left(\frac{T}{2}\right) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sin^2(T) & -\sin^2\left(\frac{T}{2}\right)\sin(T) & \sin^4\left(\frac{T}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(\cos(T)+1)\sin(T) & \frac{1}{2}(\cos(T)+\cos(2T)) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos(T)\sin(T) & \frac{1}{2}(\cos(T)-\cos(2T)) & -\sin^2\left(\frac{T}{2}\right)\sin(T) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sin^2(T) & \sqrt{\frac{3}{2}}\cos(T)\sin(T) & \frac{1}{4}(3\cos(2T)+1) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos(T)\sin(T) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sin^2(T) \\ \sin^2\left(\frac{T}{2}\right)\sin(T) & \frac{1}{2}(\cos(T)-\cos(2T)) & \sqrt{\frac{3}{2}}\cos(T)\sin(T) & \frac{1}{2}(\cos(T)+\cos(2T)) & -2\cos^3\left(\frac{T}{2}\right)\sin\left(\frac{T}{2}\right) \\ \sin^4\left(\frac{T}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{T}{2}\right)\sin(T) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sin^2(T) & \frac{1}{2}(\cos(T)+1)\sin(T) & \cos^4\left(\frac{T}{2}\right) \end{pmatrix}$$

i jest odpowiednikiem równań Maxwella dla grawitonu poruszającego się w kierunku $\vec{n} = [\sin[T], 0, \cos[T]]$

4 Jakie są wektory własne macierzy $\sin[T] \cdot J_x + \cos[T] \cdot J_z$ i jaki mają związek z kolumnami znalezionej macierzy D ?

Postać szukanej macierzy jest następująca:

$$\begin{pmatrix} 2\cos(T) & \sin(T) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(T) & \cos(T) & \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(T) & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(T) & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(T) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}\sin(T) & -\cos(T) & \sin(T) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(T) & -2\cos(T) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Wektory własne powyższej macierzy znalezione zostały za pomocą funkcji **Eigenvectors** i są one równe kolumnom macierzy D z wartościami własnymi $\{2, 1, 0, -1, -2\}$ (od lewa na prawo)

5 Ile wynoszą całki kwadratów elementów macierzowych D_{ij} tej macierzy ?

W celu obliczenia całek kwadratów elementów macierzowych macierzy D znalezionej w punkcie 3 wykonano następujące całkowanie:

$$\int_0^{\pi} \sin[T] \cdot D_{ij}^2 dT \quad (12)$$

Całka ta dla każdego elementu macierzowego D_{ij} wynosi $\frac{2}{5} = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1}$

6 Jak wyglądają macierze pchnięcia o w ($e^{\pm w J_i}$) wzdłuż osi x, y, z dla przestrzeni A i B?

6.1 Przestrzeń A

Oś x:

$$\begin{pmatrix} \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + 1) \sinh(w) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) \\ \frac{1}{2}(\cosh(w) + 1) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + \cosh(2w)) & \sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(2w) - \cosh(w)) & \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & \sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{4}(3 \cosh(2w) + 1) & \sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) \\ \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(2w) - \cosh(w)) & \sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + \cosh(2w)) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + 1) \sinh(w) \\ \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) & \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + 1) \sinh(w) & \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Oś y:

$$\begin{pmatrix} \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) & -\frac{1}{2}i(\cosh(w) + 1) \sinh(w) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & i \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) \\ \frac{1}{2}i(\cosh(w) + 1) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + \cosh(2w)) & -i\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) - \cosh(2w)) & i \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & i\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{4}(3 \cosh(2w) + 1) & -i\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) \\ -i \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) - \cosh(2w)) & i\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + \cosh(2w)) & -\frac{1}{2}i(\cosh(w) + 1) \sinh(w) \\ \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) & -i \sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & \frac{1}{2}i(\cosh(w) + 1) \sinh(w) & \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Oś z:

$$\begin{pmatrix} e^{2w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2w} \end{pmatrix}$$

6.2 Przestrzeń B

Oś x:

$$\begin{pmatrix} \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) & -2 \cosh^3\left(\frac{w}{2}\right) \sinh\left(\frac{w}{2}\right) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & -\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) \\ -2 \cosh^3\left(\frac{w}{2}\right) \sinh\left(\frac{w}{2}\right) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + \cosh(2w)) & -\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(2w) - \cosh(w)) & -\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & -\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{4}(3 \cosh(2w) + 1) & -\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) \\ -\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(2w) - \cosh(w)) & -\sqrt{\frac{3}{2}} \cosh(w) \sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w) + \cosh(2w)) & -2 \cosh^3\left(\frac{w}{2}\right) \sinh\left(\frac{w}{2}\right) \\ \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) & -\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right) \sinh(w) & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \sinh^2(w) & -2 \cosh^3\left(\frac{w}{2}\right) \sinh\left(\frac{w}{2}\right) & \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Oś y:

$$\begin{pmatrix} \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) & \frac{1}{2}i(\cosh(w)+1)\sinh(w) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sinh^2(w) & -i\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right)\sinh(w) & \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}i(\cosh(w)+1)\sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w)+\cosh(2w)) & i\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh(w)\sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w)-\cosh(2w)) & -i\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right)\sinh(w) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sinh^2(w) & -i\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh(w)\sinh(w) & \frac{1}{4}(3\cosh(2w)+1) & i\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh(w)\sinh(w) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sinh^2(w) \\ i\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right)\sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w)-\cosh(2w)) & -i\sqrt{\frac{3}{2}}\cosh(w)\sinh(w) & \frac{1}{2}(\cosh(w)+\cosh(2w)) & \frac{1}{2}i(\cosh(w)+1)\sinh(w) \\ \sinh^4\left(\frac{w}{2}\right) & i\sinh^2\left(\frac{w}{2}\right)\sinh(w) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sinh^2(w) & -\frac{1}{2}i(\cosh(w)+1)\sinh(w) & \cosh^4\left(\frac{w}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Oś z:

$$\begin{pmatrix} e^{-2w} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2w} \end{pmatrix}$$